Jordan, Camille. Notice sur les travaux de M. Camille Jordan...à l'appui de sa candidature à l'Académie des sciences, section de géométrie

Paris, Gauthier-Villars, impr.-libr., successeur de Mallet-Bachelier, 1881.

24

NOTICE

SUR LES TRAVAUX

DE

M. Camille JORDAN,

INGÉNIEUR DES MINES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

A L'APPUI DE SA CANDIDATURE A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

(SECTION DE GÉOMÉTRIE).

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1881

6700 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

LISTE DES TRAVAUX

DE

M. CAMILLE JORDAN,

Ingénieur des Mines, Professeur d'Analyse à l'École Polytechnique, Professeur suppléant du Cours de Mécanique céleste au Collège de France, Membre de la Société philomathique et Correspondant de l'Institut lombard.

Présenté en seconde ligne par la Section de Géométrie en 1871 et en 1875.

GÉOMÉTRIE PURE.

1. Recherches sur les polyèdres (*Journal de M. Borchardt*, t. LXVI).
2. Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non eulériens (*ibid.*).
3. Sur la déformation des surfaces (*Journal de M. Liouville*, 2e série, t. XI).
4. Des contours tracés sur les surfaces (*ibid.*).
5. Recherches sur les réseaux plans (*Comptes rendus*, 17 décembre 1866).
6. Recherches sur les polyèdres (second Mémoire). Théorie des aspects rétrogrades (*Journal de M. Borchardt*, t. LXVIII).
7. Sur la symétrie inverse des polyèdres non eulériens (*ibid.*).
8. Sur les assemblages de lignes (*Journal de M. Borchardt*, t. LXX).

   Ces travaux avaient été partiellement résumés dans diverses Notes publiées dans les *Comptes rendus* (20 février et 31 juillet 1865; 18 juin 1866).
9. Mémoire sur les groupes de mouvements (*Annali di Matematica*, 2e série, t. II).
10. Sur les lignes de faîte et de thalweg (*Comptes rendus*, 3 juin, 7 septembre et 28 octobre 1872).

MÉCANIQUE.

11. Mémoire sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants (*Annali di Matematica*, 2e série, t. I).

    Ce Mémoire, présenté au Concours pour le grand prix de Mathématiques, a obtenu un encouragement de l'Institut.

12. Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels (*Comptes rendus*, 27 mai 1872).

13. Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I).

14. Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps pesant posé sur un appui courbe (*Journal de M. Liouville*, 3e série, t. I).
 Résumé dans les *Comptes rendus* (23 novembre et 14 décembre 1874).

ANALYSE.

15. Thèse sur le nombre de valeurs des fonctions (Paris, Mallet-Bachelier; 1860).
 Réimprimée avec un Supplément dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIIIe Cahier.

16. Thèse sur les périodes des fonctions inverses des intégrales des différentielles algébriques (Paris, Mallet-Bachelier; 1860).

17. Sur les congruences du second degré (*Comptes rendus*, 19 mars 1866).

18. Note sur les irrationnelles algébriques (*Comptes rendus*, 17 décembre 1866).

19. Mémoire sur la résolution algébrique des équations (*Comptes rendus*, 11 février, 18 mars et 10 juin 1867).
 Un premier Mémoire moins complet avait été présenté antérieurement à l'Académie (*Comptes rendus*, 23 mai 1864).

20. Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations (*Journal de M. Liouville*, 2e série, t. XII).

21. Mémoire sur la résolution algébrique des équations (*ibid.*).

22. De quelques formules de probabilité (*Comptes rendus*, 9 décembre 1867).

23. Sur la résolution algébrique des équations de degré p^2 (p étant premier impair) (*Journal de M. Liouville*, 2e série, t. XIII).

24. Note sur les équations modulaires (*Comptes rendus*, 17 février 1868).

25. Théorèmes généraux sur les substitutions (*Comptes rendus*, 27 avril 1868).

26. Sur deux nouvelles séries de groupes (*Comptes rendus*, 27 juillet 1868).

27. Commentaire sur Galois (*Mathematische Annalen*, t. I).
 Résumé aux *Comptes rendus* (17 avril 1865).

28. Sur les équations de la division des fonctions abéliennes (*ibid.*).

29. Sur une équation du seizième degré (*Journal de M. Borchardt*, t. LXX).

30. Théorèmes sur les équations algébriques (*Journal de M. Liouville*, 2e série, t. XIV).
 Résumé aux *Comptes rendus* (1er février 1869).

31. Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre (*Journal de M. Liouville*, 2e série, t. XIV).

32. Sur les équations de la Géométrie (*Comptes rendus*, 15 mars 1869).

33. Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre (*Comptes rendus*, 12 avril 1869).

34. Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre (*Comptes rendus*, 14 février 1870).

35. Sur la division des fonctions hyperelliptiques (*Comptes rendus*, 9 mai 1870).

36. Théorème sur les fonctions doublement périodiques (*Comptes rendus*, 23 mai 1870).

37. Traité des substitutions et des équations algébriques (Paris, Gauthier-Villars; 1869 et 1870).

    L'Académie a décerné à cet Ouvrage le prix Poncelet en 1870.

38. Sur la résolution des équations les unes par les autres; suivi de Tables pour la résolution par radicaux (*Comptes rendus*, 13 mars 1871).

39. Note sur la résolution des équations différentielles linéaires (*Comptes rendus*, 25 septembre 1871).

40. Sur la classification des groupes primitifs (*Comptes rendus*, 2 octobre 1871).

41. Sur les sommes de Gauss à plusieurs variables (*Comptes rendus*, 4 décembre 1871).

42. Sur la résolution des équations algébriques les unes par les autres (*Journal de M. Liouville*, 1871).

43. Théorèmes sur les groupes primitifs (*ibid.*).

    Résumé aux *Comptes rendus* (26 juin 1871).

44. Essai sur la Géométrie à n dimensions (*Comptes rendus*, 9 décembre 1872).

45. Sur l'énumération des groupes primitifs pour les dix-sept premiers degrés (*Comptes rendus*, 23 décembre 1872).

46. Recherches sur les substitutions (*Journal de M. Liouville*, 1872).

    Résumé aux *Comptes rendus* (8 avril 1872).

47. Sur la forme canonique des congruences du second degré et le nombre de leurs solutions (*Journal de M. Liouville*, 1872).

    Résumé dans les *Comptes rendus* (22 avril 1872).

48. Sur les polynômes bilinéaires (*Journal de M. Liouville*, 1874).

    Résumé aux *Comptes rendus* (22 décembre 1873 et 2 mars 1874).

49. Sur la limite de transitivité des groupes non alternés (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I).

50. Mémoire sur les groupes primitifs (*ibid.*).

    Ces deux Mémoires ont été résumés aux *Comptes rendus* (14 avril 1873).

51. Questions de probabilité (*ibid.*).

52. Sur la limite du degré des groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée (*Journal de M. Borchardt*, 1874).

    Résumé aux *Comptes rendus* (27 avril 1874).

53. Sur les systèmes de formes quadratiques (*Journal de M. Liouville*, 1874).

    Voir également les *Comptes rendus* (22 juin 1874).

54. Sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. II).

55. Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions (*Comptes rendus*, 5 octobre 1874).

56. Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces (*Comptes rendus*, 13 octobre 1874).

57. Sur deux points de la théorie des substitutions (*Comptes rendus*, 23 novembre 1874).

58. Théorème sur la composition des covariants (*Comptes rendus*, 13 septembre 1875).

59. Sur les covariants des formes binaires (*Journal de M. Liouville*, 1876).

 Diverses parties de ce Mémoire ont été résumées aux *Comptes rendus* (5 avril et 3 mai 1875; 24 janvier 1876).

60. Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique (*Journal de M. Borchardt*, t. LXXXIV).

 Ce travail d'ensemble résume une suite de recherches qui ont fait l'objet de plusieurs Communications aux *Comptes rendus* (13 mars et 27 novembre 1876; 18 juin 1877).

61. Sur les covariants des formes binaires (second Mémoire) (*Journal de M. Liouville*, 1879).

 Résumé aux *Comptes rendus* (29 juillet 1878).

62. Sur les caractéristiques des fonctions Θ (*Journal de l'École Polytechnique*, XLVI[e] Cahier).

 Résumé aux *Comptes rendus* (19 et 26 mai 1879).

63. Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire.

 Ce Mémoire a été couronné par l'Académie royale de Naples et imprimé au Tome VIII de ses *Actes*.

64. Sur la réduction des substitutions linéaires (*Comptes rendus*, 15 mars 1880).

65. Sur l'équivalence des formes algébriques (*Comptes rendus*, 5 mai 1879).

66. Mémoire sur l'équivalence des formes (*Comptes rendus*, 14 juin 1880).

 Un travail d'ensemble sur cette question est imprimé et paraîtra incessamment dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

NOTICE

SUR LES TRAVAUX

DE

M. CAMILLE JORDAN.

AVANT-PROPOS.

« On définit ordinairement les Mathématiques la science des *grandeurs* en général, ou la science des *quantités*, c'est-à-dire, au fond, la science des *rapports;* c'est la définition la plus générale qu'on ait donnée jusqu'ici du mot *Mathématiques*. Mais, quoique cette définition paraisse embrasser la science tout entière, il me semble qu'elle n'en donne encore une idée ni assez profonde ni assez étendue. Les Mathématiques ne sont pas seulement la science des rapports, je veux dire que l'esprit n'y a pas seulement en vue la proportion et la *mesure;* il peut encore considérer le *nombre* en lui-même, l'*ordre* et la *situation* des choses, sans aucune idée de leurs rapports ni des distances plus ou moins grandes qui les séparent. Si l'on parcourt les différentes parties des Mathématiques, on y trouve partout ces deux objets de nos spéculations. »

Ainsi, à côté de l'Algèbre ordinaire « il y a une Algèbre supérieure, qui repose tout entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons ». D'autre part, « ce qui rend la théorie des polyèdres très difficile, c'est qu'elle tient essentiellement à une science presque encore neuve, que l'on peut nommer *Géométrie de situation,* parce qu'elle a principalement pour objet, non la grandeur ou la proportion des figures, mais l'ordre ou la situation des éléments qui les composent ».

Ces réflexions de Poinsot, qui ont servi d'épigraphe à mes premiers essais, caractérisent assez nettement la tendance générale de mes recherches.

Elles ont eu presque constamment pour but d'approfondir la *théorie de l'ordre* au double point de vue de la Géométrie pure et de l'Analyse.

En Géométrie, j'ai étudié successivement les lois de la symétrie des polyèdres, des systèmes de lignes et des systèmes de molécules.

En Analyse, j'ai pris pour objet principal de mes travaux la théorie des substitutions (qui n'est au fond autre chose que celle de la symétrie des expressions algébriques) et ses applications à la théorie des équations algébriques et à celle des équations différentielles linéaires.

Parmi mes autres recherches, je signalerai particulièrement une série de Mémoires sur la théorie des formes considérées au double point de vue algébrique et arithmétique.

GÉOMÉTRIE PURE.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES. — PÉRIODICITÉ.

1° Une surface est dite d'espèce (m, n) lorsque sa limite est formée de m contours fermés et qu'on peut y tracer n autres contours fermés sans la partager en deux régions distinctes.

L'importance de ces deux éléments au point de vue de la Géométrie de situation ressort des propositions suivantes :

Une surface d'espèce (m, n) est $m + 2n$ fois continue [1] (*si $m = 0$, elle sera fermée et $2n + 1$ fois continue*).

Pour que deux surfaces flexibles et extensibles soient applicables l'une sur l'autre, il faut et il suffit qu'elles soient de même espèce.

Un contour quelconque tracé sur une surface d'espèce (m, n) est réductible, par une déformation progressive, à un simple point ou à une combinaison de $m + 2n$ contours élémentaires.

On a dans toute surface polyédrique d'espèce (m, n), entre le nombre F *des faces, celui* S *des sommets et celui* A *des arêtes, la relation*

$$F + S = A + 2 - m - 2n.$$

2° J'ai déterminé, par des considérations du même genre, *le nombre*

[1] C'est-à-dire qu'on peut la couper par $m + 2n - 1$ transversales sans la partager en deux régions séparées.

des périodes des intégrales abéliennes, résultat qui complétait en un de ses points le Mémoire classique de M. Puiseux sur ces intégrales.

C'est encore sur la Géométrie de situation que reposent les résultats relatifs à la division des transcendantes exposés dans ma *Théorie des substitutions*. (*Voir* p. 32 à 34).

II.

RECHERCHES SUR LA SYMÉTRIE.

Symétrie des polyèdres.

Un observateur placé sur la surface extérieure d'un polyèdre et regardant dans la direction d'une des arêtes qui en sont issues voit les faces, arêtes et sommets du polyèdre s'enchaîner les uns aux autres, à partir de cette arête initiale, dans un certain ordre, qu'on peut appeler l'*aspect direct* du polyèdre par rapport à ce sommet et à cette arête. Si A est le nombre des arêtes, celui des aspects directs sera 2A.

Si l'observateur se plaçait sur la surface intérieure du polyèdre, il obtiendrait 2A nouveaux aspects (*aspects rétrogrades*).

Les 4A aspects ainsi trouvés seront généralement différents; il peut toutefois arriver que quelques-uns d'entre eux soient semblables. Je me suis proposé d'étudier les diverses sortes de symétries qu'un polyèdre ou fragment de polyèdre peut présenter à ce sujet. Après avoir exposé, dans deux Mémoires étendus, les principes qui conduisent à la solution de cette question, je les ai appliqués aux trois sortes de surfaces polyédriques les plus remarquables. Cette étude fournit les résultats suivants :

1° Polyèdres d'espèce (0, 0). (Cette catégorie contient les polyèdres convexes.)

Si l'un de ces polyèdres P *présente plusieurs aspects directs semblables, on pourra construire, d'une infinité de manières, un nouveau polyèdre* Π, *formé de faces de même nature, et qui soit exactement superposable à lui-même sous ces divers aspects.*

Ces polyèdres peuvent être répartis, au point de vue de la symétrie de *leurs aspects directs, en* neuf *classes, qui peuvent elles-mêmes se subdiviser en ordres, familles, genres, etc.* (¹).

Si le polyèdre P *a ses aspects directs semblables à ses aspects rétrogrades, on pourra déterminer, d'une infinité de manières, le polyèdre* Π, *de telle sorte qu'il soit symétrique à lui-même par rapport à un plan ou à un point donné.*

Cette symétrie inverse peut se présenter de dix-huit *manières différentes,* ce qui porte à *vingt-sept* le nombre total des classes à distinguer dans les polyèdres d'espèce (o, o).

2° Polyèdres d'espèce (o, 1). (Polyèdres ayant une forme analogue à celle du tore.) Ils donnent lieu à de tout autres résultats. On peut les partager, au point de vue de la symétrie directe, en *trois* classes. Quant à la symétrie inverse, elle peut se produire de *neuf* manières, ce qui fait un total de *douze* classes.

3° Réseaux plans formés de polygones accolés.

Si l'un de ces réseaux présente plusieurs aspects directs semblables, on pourra déterminer, d'une infinité de manières, un réseau formé de polygones de même nature et superposable à lui-même sous ces divers aspects.

Ces réseaux se partagent en neuf classes, au point de vue de la symétrie de leurs aspects directs.

Je citerai enfin une dernière proposition qui me paraît la plus intéressante de cette théorie par sa généralité et par le procédé qui sert à la démontrer :

Le nombre des aspects semblables que peut présenter un polyèdre d'espèce (o, n) *est limité, si* $n > 1$.

Cette théorie de la symétrie des polyèdres vient de prendre un intérêt tout nouveau par l'importante application qu'en a faite M. Klein à l'é-

(¹) Dans son Rapport à l'Académie sur ce premier travail, M. Bertrand s'exprimait ainsi :
« Le Mémoire de M. Jordan est relatif à une question intéressante et nouvelle, qu'il a eu à la fois le mérite de poser le premier, et de résoudre d'une façon très heureuse....
» Le Mémoire de M. Jordan, très intéressant par ses résultats, montre, chez son auteur, en même temps qu'une grande perspicacité, une rare habileté dans l'emploi des considérations géométriques les plus délicates, et l'Académie ne saurait trop encourager l'auteur à persévérer dans une voie où il a su, dans une question tout élémentaire et placée en quelque sorte au seuil de la Science, déployer un véritable talent de géomètre. »

tude des fonctions algébriques (*Mathematische Annalen*, t. XIV et XV). On peut également consulter à ce sujet la *Dissertation inaugurale* de M. Walter Dyck (Munich, 1879).

Symétrie des assemblages de lignes.

Après la symétrie des polyèdres, j'ai considéré celle des assemblages de lignes. Après avoir reconnu l'identité de ce problème avec celui de la symétrie des formes quadratiques, j'ai établi les propositions suivantes :

Dans tout assemblage A *à continuité simple, on peut déterminer de* quatre *manières différentes un sommet central* (*ou une arête centrale*) *se correspondant à lui-même sous tous les aspects pour lesquels* A *est semblable à lui-même.*

Si A *est doublement continu, on pourra y déterminer un contour fermé central; s'il l'est triplement, un sommet* (*ou arête*) *central ou un système de deux pôles, etc.*

Ces résultats ont été appréciés d'une manière flatteuse par M. Sylvester. Cet éminent géomètre a indiqué le moyen de les appliquer à l'étude du groupement des atomes dans les molécules chimiques.

GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE.

Groupes de mouvements.

On sait que le déplacement le plus général d'un solide est un mouvement hélicoïdal, et que, deux semblables mouvements étant donnés, on pourra en déterminer un troisième résultant des deux premiers.

Lorsque les deux mouvements composants sont infiniment petits, l'ordre dans lequel on les effectue est indifférent et le mouvement résultant s'obtient par les règles connues.

S'il s'agit au contraire de mouvements finis, le mouvement résultant dépend de l'ordre dans lequel on effectue les mouvements composants, et j'ai indiqué, pour le déterminer, des règles nouvelles et fort simples.

Ces préliminaires établis, j'ai résolu la question suivante :

Trouver tous les groupes de mouvements tels qu'en composant ensemble deux mouvements quelconques du groupe on obtienne un mouvement résultant qui fasse lui-même partie du groupe.

Ou, en d'autres termes :

Déterminer les diverses manières dont un système de molécules peut être superposable à lui-même.

La belle théorie cristallographique de Bravais repose sur la solution qu'il a donnée de ce problème dans le cas particulier où toutes les molécules sont orientées de même et disposées en réseau. En traitant la question dans toute sa généralité, j'ai obtenu les résultats suivants :

Les groupes exclusivement formés de mouvements de translation sont au nombre de neuf; *leurs divers mouvements résultent de la combinaison de* trois *translations au plus.*

Les groupes exclusivement formés de rotations sont au nombre de huit; *leurs rotations sont toutes concourantes.*

A tout groupe G *contenant des mouvements hélicoïdaux on peut faire correspondre un autre groupe g formé de rotations concourantes. Les groupes* G *peuvent être répartis en* six *catégories, suivant la nature du groupe g qui leur correspond.*

Première catégorie : *Les rotations de g s'opèrent toutes autour du même axe.* Cette catégorie contient *soixante groupes* G.

Deuxième catégorie : *g dérive de deux rotations, dont l'une de* 180°, *autour de deux axes rectangulaires.* Cette catégorie contient *soixante et onze groupes.*

Troisième, quatrième et cinquième catégories : *g est formé des rotations qui superposent à lui-même un tétraèdre, un octaèdre ou un icosaèdre régulier.* Ces catégories contiennent respectivement *seize, huit* et *un groupe* G.

Sixième catégorie : *g contient toutes les rotations possibles. Il n'existe dans ce cas qu'un groupe* G, *contenant tous les mouvements possibles.*

La démonstration rigoureuse de cette dernière proposition constitue le point fondamental de mon analyse.

On arrive ainsi à un total de *cent soixante-quatorze* groupes possibles. Dans ce nombre, il en est *vingt-trois* particulièrement remarquables, qu'on peut appeler *groupes principaux*. Ils sont définis comme il suit :

Premier groupe. — Il contient tous les mouvements possibles.

Deuxième groupe. — Il contient toutes les rotations possibles autour d'un point.

Troisième groupe. — Il contient les 24 mouvements qui superposent à lui-même un octaèdre régulier.

Quatrième groupe. — Il contient les 60 mouvements qui superposent à lui-même un icosaèdre régulier.

Cinquième groupe. — Il contient les mouvements du quatrième groupe, joints à toutes les translations possibles.

Sixième groupe. — Ses mouvements résultent de la combinaison de trois translations distinctes t, t_1, t_2, non situées dans le même plan.

Septième groupe. — Ses mouvements superposent à lui-même un assemblage cubique et résultent de trois rotations de 90°, exécutées autour de trois axes concourants rectangulaires, et de trois translations de même longueur θ, respectivement parallèles à ces trois axes.

Huitième groupe. — Ses mouvements résultent d'une rotation binaire autour d'un axe A, combinée à deux translations distinctes t et t_1, toutes deux normales à A.

Neuvième groupe. — Il s'obtient en combinant les mouvements du précédent avec une translation θ parallèle à A.

Dixième groupe. — Ses mouvements résultent de la combinaison d'un mouvement hélicoïdal quelconque autour d'un axe A avec une rotation binaire autour d'un axe B qui coupe A normalement.

Onzième groupe. — Il se déduit du précédent en supposant que le mouvement hélicoïdal, autour de A, se réduise à une rotation dont l'amplitude soit égale à $\frac{2\pi}{n}$, n étant un entier.

Douzième groupe. — Il est formé de la réunion des mouvements des deux groupes précédents.

Treizième groupe. — Il se déduit du dixième en supposant que le mouvement hélicoïdal se réduise à une translation θ.

Quatorzième, quinzième, seizième et dix-septième groupes. — Ils s'obtiennent en combinant les mouvements des quatre groupes précédents avec l'ensemble des translations perpendiculaires à A.

Dix-huitième groupe. — Ses mouvements résultent de la combinaison de rotations binaires, autour de trois axes rectangulaires concourants A, B, C, avec des translations t et t_1 respectivement parallèles à B et à C. Ils superposent à lui-même le réseau plan rectangulaire formé sur t et t_1.

Dix-neuvième groupe. — Ses mouvements s'obtiennent en combinant ensemble : 1° une rotation d'amplitude $\frac{\pi}{3}$ autour d'un axe A; 2° une rotation binaire autour d'un second axe B qui coupe le premier normalement; 3° une translation t parallèle à B. Ils superposent à lui-même un réseau plan dont la maille est un triangle régulier formé sur le côté t.

Vingtième groupe. — Ses mouvements s'obtiennent en combinant ensemble : 1° une rotation d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ autour de A; 2° une rotation binaire autour de B; 3° une translation t parallèle à B. Ils superposent à lui-même le réseau à maille carrée formé sur le paramètre t.

Vingt et unième, vingt-deuxième et vingt-troisième groupes. — Ils s'obtiennent respectivement en combinant aux mouvements des trois précédents une nouvelle translation θ parallèle à A.

La plupart des 23 groupes qui précèdent contiennent certains paramètres: $\frac{1}{n}$, θ, t, t_1, t_2. Quels que soient les systèmes de valeurs finies que l'on donne à ces paramètres, le type du groupe ne sera pas essentiellement changé; mais il le sera si l'on suppose ces paramètres infiniment petits. On obtiendra par là de nouveaux groupes, se rattachant très naturellement aux précédents.

Cela posé, ceux des 174 groupes qui ne sont ni principaux ni dérivés des principaux, comme il vient d'être dit, sont tous des groupes *mériédriques*, c'est-à-dire contenant une fraction déterminée des mouvements de quelqu'un des précédents. Ainsi, le groupe des 24 mouvements qui superposent l'octaèdre régulier à lui-même contient un groupe hémiédrique formé des 12 mouvements qui superposent le tétraèdre régulier à lui-même.

On peut citer encore, comme groupes mériédriques remarquables, ceux qui sont contenus dans le groupe principal qui superpose à lui-même un assemblage cubique : ils sont, à eux seuls, au nombre de *vingt-deux*.

En terminant ce Mémoire, j'exprimais la pensée que les résultats géométriques qu'il contient pourraient être utilisés en Cristallographie. Cette prévision paraît s'être réalisée. M. Leonhardt Sohncke a publié, en 1879, un Livre consacré à une théorie nouvelle de la structure cristalline, établie tout entière sur ce fondement. Il en déduit une explication plausible de divers phénomènes, et particulièrement de la polarisation circulaire du quartz.

TOPOGRAPHIE.

Les lignes de faîte et de thalweg ont été souvent l'objet de définitions vagues ou inexactes. J'ai reconnu que *ces lignes ne présentent sur leur parcours aucun caractère qui les distingue des autres lignes de plus grande pente. On ne peut les reconnaître qu'à cette circonstance qu'elles aboutissent au sommet des vallées. Ce sommet est généralement un col : il peut aussi être un point maximum ou minimum de la ligne lieu des points d'inflexion des courbes de niveau. Cette dernière ligne est la limite naturelle entre les vallées et les parties du sol qui sont en relief.*

MÉCANIQUE.

I.

CINÉMATIQUE.

J'ai obtenu les résultats suivants :

Lorsqu'une figure se meut dans un plan, on trouve un cercle pour lieu des points :

1° *Dont la vitesse aréolaire est constante ;*

2° *Dont la vitesse est dans un rapport constant avec l'une des trois accélérations* (totale, tangentielle ou normale) ;

3° *Dont la vitesse fait avec l'accélération un angle constant.*

Les accélérations d'ordre supérieur donnent lieu à une infinité de théorèmes analogues.

Lorsqu'un solide se meut dans l'espace, soient D_1 la vitesse d'un de ses points, D_2, D_3, ... ses accélérations successives du second ordre, du troisième ordre, etc. :

1° *La condition* $D_m =$ const. *définit un ellipsoïde* (se réduisant, comme on sait, à un cylindre si $m = 1$).

2° *La condition* $D_m D_n \cos(D_m D_n) =$ const. *définit une surface du second ordre ;*

3° *La condition* angle$(D_m D_n) =$ const. *définit une surface du quatrième ordre,* laquelle se réduit à une *surface du second ordre* si la const. $= \frac{\pi}{2}$, à une *cubique gauche* si la constante est nulle ;

4° *Le lieu des points de l'espace qui sont à un instant donné points d'inflexion sur leurs trajectoires est une cubique gauche ;*

5° *Le lieu des points pour lesquels* D_m *est perpendiculaire à* D_n *et à* D_p

est une biquadratique gauche. Il y a huit points pour lesquels D_m, D_n, D_p *forment un trièdre trirectangle ;*

6° *Le lieu des points pour lesquels le tétraèdre formé sur* D_m, D_n, D_p *a un volume donné est une surface du troisième ordre ;*

7° *Le lieu des points pour lesquels le plan osculateur de la trajectoire est stationnaire est une surface du troisième ordre ;*

8° *Le lieu des points pour lesquels quatre accélérations* D_m, D_n, D_p, D_q *sont dans un même plan est une courbe gauche du sixième ordre ;*

9° *Il y a neuf points pour lesquels cinq accélérations sont dans un même plan.*

II.

STABILITÉ.

Corps flottants.

Pour déterminer les conditions de stabilité de leur équilibre, j'ai établi directement les équations différentielles linéaires qui régissent leurs petites oscillations. L'intégration de ces équations redonne la condition connue qu'on tire de l'équation des forces vives, en exprimant que la fonction des forces est minimum.

Dirichlet a montré que cette condition suffit à assurer la stabilité ; mais, pour prouver qu'elle est nécessaire, il faut recourir aux équations du mouvement. On doit vérifier, en outre, que les conséquences tirées de ces équations, quand on se borne aux termes du premier ordre, subsistent lorsqu'on rétablit les termes négligés. J'ai montré, en faisant varier les constantes, que ces termes ne peuvent avoir d'influence sur l'intégrale, quelle que soit l'époque que l'on considère, que lorsque le déplacement du corps est devenu incomparablement plus grand que le déplacement initial. Enfin j'ai établi le théorème suivant :

Un corps flottant, oscillant autour d'une position d'équilibre stable, tourne progressivement autour de la verticale, à moins qu'à l'instant initial son axe instantané de rotation (autour du centre de gravité) ne soit situé dans le plan conjugué à la verticale par rapport à l'ellipsoïde d'inertie.

Solide posé sur un appui fixe.

Les conditions de stabilité de l'équilibre sont les suivantes :

Les deux courbures principales de la surface du solide doivent être de même signe que les courbures correspondantes de la surface de l'appui.

Le centre de gravité du solide doit être situé au-dessous des centres de courbure de sa surface extérieure.

Pour prouver que ces conditions sont suffisantes, je montre que, si elles sont satisfaites, tout mouvement virtuel élèvera le centre de gravité. La démonstration présente cette particularité nouvelle que, pour la rendre complète, *il faut tenir compte dans le calcul des termes du quatrième ordre*, au lieu de s'arrêter au second ordre, comme c'est l'ordinaire dans les questions de ce genre.

On voit ensuite que ces conditions sont nécessaires en discutant les équations différentielles des petites oscillations. Ici encore se présente une singularité : *ces équations sont linéaires*, mais leurs coefficients sont, en général, des *fonctions périodiques du temps, à variation très lente*. Ils ne deviennent constants que dans deux cas :

1° *Si l'appui est de révolution ;*

2° *Si le solide mobile est de révolution et isotrope par rapport à la verticale.*

ANALYSE.

CALCUL DES PROBABILITÉS.

J'ai traité les questions suivantes :

1° Un événement peut être produit par diverses causes; on connaît la probabilité de chacune d'elles et celle de leurs combinaisons deux à deux, trois à trois, etc. : trouver la chance pour que l'événement soit dû au concours de r d'entre elles.

2° Une droite de longueur l est divisée en m segments : quelle est la probabilité pour que n d'entre ces segments surpassent une longueur donnée a?

3° Quatre points sont pris au hasard sur une sphère : quelle est la chance pour qu'ils forment un quadrilatère convexe?

4° On prend au hasard trois points A, B, C dans l'intérieur d'une figure plane fermée ayant un centre O : quelle est la chance pour que O tombe dans le triangle A, B, C.

5° La méthode des moindres carrés conduit, comme on sait, à chercher le minimum de la somme des carrés de n fonctions linéaires de m variables $x_1, \ldots, x_m$. J'ai obtenu l'expression de ce minimum et des valeurs correspondantes des variables sous forme de fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des sommes de carrés ou de produits de déterminants. (On connaissait déjà quelques cas particuliers de cette formule : plus courte distance de deux droites; courbure et torsion des courbes gauches.)

GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS.

La Géométrie analytique n'est autre chose que l'étude des fonctions de deux ou trois variables et des transformations qu'on peut leur faire subir par des substitutions de diverses sortes (principalement par des substitutions orthogonales). Étendant ces théories à un nombre quelconque de variables, on pourra nommer *point*, dans un espace à n dimensions, un système de valeurs des n variables, *surface, bisurface*, ... et enfin *courbe* l'ensemble des points définis par $1, 2, \ldots, n-1$ équations.

On sait, par les travaux de divers géomètres, que la théorie des surfaces ordinaires s'étend sans changement notable au cas de n dimensions. J'ai reconnu que la même analogie subsiste en ce qui concerne les courbes.

Il existe d'ailleurs dans l'espace à n dimensions, entre les surfaces et les courbes, des êtres géométriques intermédiaires (k-surfaces) définis par k équations, k étant >1 et $<n-1$. N'ayant pas d'analogue dans la Géométrie ordinaire, ils donnent lieu à des recherches plus intéressantes.

J'ai d'abord étudié les éléments qui définissent, indépendamment du choix des coordonnées, la situation relative de deux multi-plans ayant un point commun. Dans l'espace ordinaire, où l'on n'a que des plans et des droites, cette situation est définie par un seul *invariant orthogonal*, l'angle des droites ou plans considérés. Ici la question devient plus compliquée, ainsi qu'il résulte des propositions suivantes :

Un système formé d'un k-plan P_k et d'un l-plan P_l passant par un même point de l'espace possède ρ invariants distincts, ρ étant le plus petit des nombres $k, l, n-k, n-l$. Ces invariants (*angles* des deux multi-plans) *sont les racines d'une même équation caractéristique.*

Les divers plans perpendiculaires à P_k se coupent suivant un $(n-k)$-plan

P_{n-k}, *dont les angles avec* P_l *s'obtiendront en ajoutant* $\frac{\pi}{2}$ *aux angles de* P_k *et de* P_l.

Un système de deux multi-plans qui ne se coupent pas possède un invariant de plus, leur plus courte distance.

Dans la suite de mon travail, je donne le système des formules qui relient entre eux les angles mutuels des divers multi-plans formés avec n plans donnés concourant en un même point. Ces formules se réduisent, pour $n=3$, à celles de la Trigonométrie sphérique. Je les rattache à la considération du déterminant de la forme quadratique qui donne la distance de deux points (les n plans donnés étant pris pour plans coordonnés).

Je montre ensuite comment *une substitution orthogonale de déterminant* 1 *peut être ramenée, par une transformation orthogonale opérée sur les variables, à une forme canonique dépendant de* $\frac{n}{2}$ *invariants, si* n *est pair, de* $\frac{n-1}{2}$ *si* n *est impair.* Je donne l'expression de ces invariants, ainsi que les équations aux dérivées partielles qui les caractérisent. J'en déduis la généralisation des théorèmes fondamentaux de la Géométrie cinématique et, dans le cas de quatre dimensions, une construction géométrique pour la composition des rotations.

J'ai enfin établi le théorème suivant :

Une k*-surface, située dans l'espace à* $m+k$ *dimensions, présente en chaque point* m *directions rectangulaires telles que la somme des carrés des angles formés par deux* k*-plans tangents consécutifs, divisée par* ds^2, *soit maximum ou minimum.*

Cette proposition doit être considérée comme la généralisation du théorème d'Euler sur les courbures principales. Cette extension présente quelque intérêt, car la plupart des autres théorèmes sur les surfaces, notamment ceux de Monge sur les lignes de courbure, ne s'appliquent pas aux multi-surfaces.

THÉORIE DES FORMES.

I.

THÉORIE ALGÉBRIQUE.

Formes quadratiques.

Plusieurs géomètres se sont occupés de la réduction à une forme canonique d'un système de deux formes quadratiques simultanées; mais la première solution complète de cette question a été donnée par M. Kronecker (*Monatsberichte,* 1874).

J'ai simplifié cette méthode et j'en ai déduit la solution des deux questions suivantes :

Trouver les conditions d'équivalence de deux systèmes quadratiques.
Trouver les transformations d'un système en lui-même.

On démontre aisément qu'il est nécessaire et suffisant pour l'équivalence que les deux systèmes aient des réduites identiques.

Pour résoudre la seconde question, on forme *a priori* un certain nombre de substitutions simples qui n'altèrent pas le système. On démontre ensuite que toutes les substitutions qui jouissent de cette propriété dérivent de la combinaison de celles-là.

Formes binaires.

M. Gordan a démontré que les covariants d'un système de formes binaires s'expriment tous en fonction entière de covariants indépendants dont l'ordre (par rapport aux variables) et le degré (par rapport aux coefficients) sont limités.

Il établit cette proposition fondamentale, par un procédé de récurrence, en montrant : 1° qu'elle est vraie pour une forme d'ordre N si elle est vraie pour les systèmes de formes d'ordre $< N$; 2° qu'elle est vraie pour un système de k formes si elle est vraie pour les systèmes de moins de k formes.

Cette méthode, quoique fort belle, semble peu propre à déterminer la valeur des limites dont elle prouve l'existence.

J'ai réussi à fixer ces limites.

Les valeurs obtenues *ne dépendent que de l'ordre des formes du système donné et restent les mêmes quel que soit le nombre de ces formes* (1).

---

(1) Ces valeurs sont fournies par le théorème suivant :

Tout covariant d'un système de formes $a, b, c, \ldots$, *dont aucune n'est d'ordre supérieur à* N, *s'exprime en fonction linéaire de produits* RST *ainsi définis :*

T *est un produit d'invariants dont le degré ne surpasse pas* $(7N-6)3^\rho$, ρ *étant le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité*

$$\rho \leqq 2 + \frac{\log \frac{N}{4}}{\log \frac{4}{3}}.$$

S *est un produit de covariants dont l'ordre ne surpasse pas* $2N-2$ *et dont le degré ne surpasse pas* 2.3^ρ.

R *est un covariant dont l'ordre* O *et le degré* D *sont limités par les inégalités*

$$O < 2N^2, \quad D < (9N^2 - O)3^\rho.$$

Il peut d'ailleurs s'exprimer en fonction entière de covariants dont l'ordre ne surpasse pas $N\delta - 2\varphi(\delta)$, δ *étant le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité*

$$f(\delta) < \frac{N}{2},$$

enfin f *et* φ *désignant deux fonctions numériques définies par les formules récurrentes*

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2,$$
$$f(2i+3) = f(2i+2) + 2E\left[\frac{f(i+3)}{4}\right],$$
$$f(2i+2) = f(2i+1) + 2E\left[\frac{f(i+2)+2}{4}\right],$$
$$\varphi(1) = 0,$$
$$\varphi(i) = \varphi(i-1) + f(i).$$

où $E(x)$ *désigne le plus grand entier contenu dans* x.

Le calcul des limites déterminées par ces formules s'effectue avec la plus grande facilité. La limite trouvée pour le degré des covariants indépendants pourrait sans doute être notablement abaissée par une étude plus approfondie.

Celle qu'on obtient pour l'ordre paraît au contraire être *précise*. M. Sylvester l'a vérifié jusqu'aux formes du dixième ordre inclusivement.

II.

THÉORIE ARITHMÉTIQUE.

1° Mon premier travail sur la théorie arithmétique des formes quadratiques est relatif au *calcul des sommes de Gauss à plusieurs variables*. Cette question, qui se lie étroitement à la théorie générale des fonctions Θ, avait déjà été traitée par M. Weber dans un Mémoire étendu (*Journal de M. Borchardt*, t. LXXIV). J'en ai donné une nouvelle solution beaucoup plus simple.

Cette question conduit naturellement à la suivante, qui est plus difficile :

Déterminer le nombre des solutions d'une congruence du second degré

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{M}.$$

On ramène aisément ce problème au cas où M est un nombre premier p ou une puissance de p. On le résout, dans ce cas, en ramenant la congruence à une forme réduite où l'énumération des solutions se fasse sans peine.

La question n'offre pas de difficulté sérieuse si p est impair; elle est plus délicate si $p = 2$. Dans ce cas, plusieurs réduites peuvent être équivalentes entre elles, et le système des conditions accessoires nécessaires pour supprimer les réduites superflues est assez compliqué.

2° J'ai été conduit plus récemment à étudier les formes bilinéaires de M. Hermite,

$$F = \text{norme}(a_1 x_1 + b_1 x_1 + \ldots) + \text{norme}(a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots) + \ldots,$$

où $a_1, b_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ sont des entiers complexes. Ces expressions contiennent, comme cas particulier, les formes quadratiques définies. J'ai obtenu les propositions suivantes :

Toute forme F *de déterminant* $\Delta \gtrless 0$ *est équivalente à une réduite où les modules des coefficients sont limités en fonction de la norme de* Δ *et du minimum* μ *de* F.

Les formes F *à coefficients entiers se répartissent en un nombre limité de classes.*

Les substitutions linéaires à coefficients entiers qui transforment une réduite en elle-même ou en une autre réduite ont leurs coefficients limités en fonction du nombre n des variables.

Ce théorème donne la solution du problème de l'équivalence des formes F et de leurs transformations en elles-mêmes.

Cette analyse m'a permis d'étendre aux formes de degré quelconque et à coefficients complexes les méthodes inaugurées par M. Hermite dans ses recherches sur l'équivalence des formes quadratiques indéfinies. On obtient comme résultat les propositions suivantes :

Toute forme F *à coefficients entiers est équivalente à une réduite dont les coefficients sont limités en fonction des invariants.*

Les formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à une même forme se distribuent en un nombre limité de classes.

Le nombre des substitutions qui transforment une réduite en elle-même ou en une autre réduite est limité en fonction du nombre des variables et du degré des formes considérées. Leurs coefficients sont limités en fonction des invariants.

On pourra donc, par un nombre limité d'opérations, reconnaître si deux formes sont équivalentes et trouver les transformations de l'une dans l'autre.

Les propositions précédentes peuvent être en défaut : 1° si les formes considérées sont quadratiques; 2° si leur discriminant et en général le discriminant de tous leurs covariants s'annulent à la fois. Mais, même dans ce cas d'exception, si le nombre des réduites reste limité, on établit que, *si deux réduites sont équivalentes, on pourra les transformer l'une dans l'autre par une substitution à coefficients limités,* et que *les substitutions qui transforment une réduite en elle-même résultent de la combinaison d'un nombre limité d'entre elles dont les coefficients sont limités.*

On peut encore rattacher aux recherches précédentes la proposition que voici :

Toute substitution linéaire à n variables, à coefficients réels ou complexes et de déterminant D, *peut être mise sous la forme* ELE′, E *et* E′ *désignant* *des substitutions à coefficients entiers et de déterminant* 1, *et* L *une substitution dont les coefficients ont leur norme inférieure à* $k\sqrt[n]{\Delta}$, Δ *désignant la norme de* D *et* k *une quantité fixe qui ne dépend que de* n.

SUBSTITUTIONS.

I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SUBSTITUTIONS.

J'ai obtenu, dans cette théorie, un grand nombre de résultats nouveaux, dont voici les principaux :

1° *Soit* G *un groupe composé* [1], *on pourra déterminer* (*souvent de plusieurs manières*) *une suite de groupes* G, H, I, ... *tels que chacun soit contenu dans le précédent et permutable à ses substitutions, mais ne soit contenu dans aucun autre groupe jouissant de cette double propriété.*

En divisant l'ordre de chacun de ces groupes par celui du groupe sui-

---

[1] Deux substitutions S et T sont dites *échangeables* si ST = TS.

Un groupe G, formé des substitutions $S_1, S_2, \ldots$, est *permutable* à une substitution T, si l'on a, pour toute valeur de i, une équation de la forme

$$S_i T = T S_k.$$

Un groupe G est *k fois transitif*, si ses substitutions permettent d'amener k lettres à des places arbitraires. Il est *primitif* si les lettres ne peuvent être groupées en systèmes tels, que toute substitution de G remplace les lettres de chaque système par celles d'un même système. Il est *simple* s'il ne contient aucun groupe permutable à ses substitutions, *composé* dans le cas contraire.

On nomme *ordre* d'un groupe le nombre de ses substitutions, *degré* du groupe le nombre des lettres soumises à ses substitutions.

vant, on obtient une suite d'entiers $\lambda, \mu, \ldots$ *Ces entiers (facteurs de composition de* G) *resteront les mêmes à l'ordre près, de quelque manière qu'on détermine la suite* G, H, I, ...

Cette proposition entre comme élément essentiel dans mes recherches sur la théorie des équations.

2° *Soit p un nombre premier; un groupe de degré $p+k$ (ne contenant pas le groupe alterné) ne peut être plus de k fois transitif si $k>2$* (¹).

On en déduit le corollaire suivant :

Une fonction de n lettres qui n'est pas symétrique (ou alternée), par rapport à k lettres, a nécessairement plus de $\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}$ [*ou* $2\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}$] *valeurs, dès que n surpasse une certaine limite.*

On reconnaît dans cet énoncé la généralisation d'une proposition bien connue de M. Bertrand.

3° *Les groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée ont leur degré limité* (²).

(¹) J'ai obtenu plusieurs autres déterminations de la limite de transitivité; voici les principales :

Un groupe de degré $2p+k$ ne peut être plus de k fois transitif si $k>3$.

Plus généralement, un groupe de degré $p^n q+k$, où q est premier à p et contenu entre p^m et p^{m+1}, ne peut être plus de k fois transitif si l'on n'a pas une des trois inégalités suivantes :

$$k<5,\quad k \overline{\gtrless} q,\quad m+n \overline{\gtrless} k-\frac{\log k}{\log 2}-3.$$

(²) Cette proposition étant la plus importante que j'aie obtenue dans cette théorie, j'ai consacré plusieurs Mémoires à la détermination aussi précise que possible de cette limite. Je suis parvenu à cet égard aux résultats suivants :

Si la substitution donnée S *déplace m lettres, la limite* D *sera donnée par la formule*

$$D<\frac{(m+4)\left(m+4\log\frac{m}{2}\right)}{4}.$$

On obtient des résultats plus précis en supposant, ce qui est évidemment permis, que S

On en déduit cette conséquence :

Si l'on répartit les groupes primitifs en classes d'après le nombre minimum de lettres que déplacent leurs substitutions, chaque classe ne contiendra qu'un nombre limité de groupes.

J'ai calculé le tableau des groupes des treize premières classes, montré que les classes 25 et 49 n'en contiennent aucun; enfin j'ai établi la proposition générale suivante :

Si p est premier, la classe p ne contient qu'un seul groupe, à moins que p ne soit de la forme $2^n - 1$, auquel cas elle en contient trois.

Des recherches qui précèdent, j'ai déduit l'énumération complète des groupes primitifs des dix-sept premiers degrés, et jeté par là *les bases d'une classification des équations jusqu'au dix-septième degré inclusivement.*

II.

SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

Les principales questions que j'ai résolues dans cette théorie sont les suivantes :

1° *Détermination de l'ordre et des facteurs de composition du groupe linéaire; décomposition de ses substitutions en un produit de substitutions simples.*

2° *Réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique.*

---

soit une substitution d'ordre premier p; en désignant par q le nombre des cycles de S, on aura

$$D < (p+q)(p+q\log q).$$

Si p surpasse $\frac{2}{\log 2} q \log q + q + 1$, on aura cette autre limite

$$D \overline{\gtrless} pq + \frac{2}{\log 2} q \log q + 2q.$$

On en conclut que *le nombre* $D - pq$ *des lettres du groupe que* S *ne déplace pas a une limite indépendante de* p.

Enfin, si $q < 6$ et $p \geq q$, on aura

$$D \overline{\gtrless} pq + q + 1.$$

3° *Détermination des substitutions linéaires échangeables à une substitution linéaire donnée.*

4° *Étude du groupe orthogonal; son ordre.*

5° *Étude du groupe abélien* ([1]); *ordre et facteurs de composition; décomposition de ses substitutions en un produit de substitutions simples.*

6° *Solution des mêmes questions pour deux nouveaux groupes que j'ai découverts et auxquels j'ai donné le nom de* groupes hypo-abéliens.

7° *Groupes de Steiner* ([2]); *propriétés de leurs substitutions; isomorphisme de ces groupes avec les groupes abéliens et l'un des groupes hypoabéliens.*

La discussion des groupes de Steiner se lie étroitement à la question des caractéristiques des fonctions Θ. Dans un récent Mémoire, j'ai étudié, dans toute leur généralité, certains groupements remarquables de ces caractéristiques, dont MM. Weber et Nöther avaient signalé l'existence dans le cas de trois ou de quatre variables et dont ils avaient fait d'intéressantes applications au problème de l'addition.

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

I.

THÉORIE GÉNÉRALE.

Galois a démontré qu'à toute équation correspond un groupe de substitutions où se reflètent ses principales propriétés et dont l'étude

---

([1]) Groupe découvert par M. Hermite dans ses recherches sur la transformation des fonctions abéliennes.

([2]) L'un des quatre groupes auxquels j'ai donné ce nom a été rencontré par Steiner dans ses recherches sur les doubles tangentes aux courbes du quatrième ordre.

Deux groupes sont dits *isomorphes* lorsqu'on peut établir entre leurs substitutions une correspondance telle qu'au produit de deux substitutions corresponde le produit de leurs correspondantes.

est entièrement équivalente, au point de vue algébrique, à celle de l'équation elle-même, tout en présentant beaucoup moins de difficultés de calcul.

J'ai repris et développé cette théorie, en y ajoutant plusieurs théorèmes nouveaux, parmi lesquels je ne citerai que les suivants :

1° *Si une équation est irréductible, son groupe est transitif, et réciproquement.*

2° *Si le groupe d'une équation de degré n n'est pas primitif, la résolution d'une équation de degré μ (μ étant un diviseur de n) la décomposera en μ équations de degré $\frac{n}{\mu}$, et réciproquement.*

3° *Si le groupe* G *d'une équation* $F(x) = 0$ *est simple, elle ne pourra être résolue qu'au moyen d'équations dont le groupe ait pour ordre un multiple de celui de* G.

Au contraire, si G *est composé, soient* $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ *ses facteurs de composition; la résolution de* $F(x) = 0$ *se ramènera à celle d'équations auxiliaires dont les groupes seront simples et auront respectivement pour ordre* $\lambda, \mu, \nu, \ldots$.

4° *Si le groupe* G *d'une équation* $F(x) = 0$ *est simple, à chaque groupe* g *contenu dans* G *correspondra une classe d'équations réduites équivalentes à* G *et de degré* $\frac{\Omega}{\omega}$ *(Ω et ω désignant respectivement l'ordre des groupes* G *et* g*).*

5° *Pour que la résolution d'une équation* $F(x) = 0$ *soit facilitée par celle d'une équation à groupe simple* $f(z) = 0$, *il faut et il suffit que les racines de* $f(z)$ *soient des fonctions rationnelles de celles de* $F(x)$.

6° *Toute relation algébrique entre les racines* $x_1, \ldots, x_m$ *et* $z_1, \ldots, z_n$ *de deux équations* $F(x) = 0$ *et* $f(z) = 0$ *peut être mise sous la forme*

$$\psi(x_1, \ldots, x_m) = \chi(z_1, \ldots, z_n),$$

où ψ et χ sont des fonctions rationnelles.

7° *L'équation générale du degré n ne peut être résolue au moyen d'équations de degré inférieur, si $n \gtrless 4$.*

M. Hermite avait remarqué que, lorsqu'une équation contient des paramètres variables, il existe un groupe (*groupe de monodromie*) tel que toute fonction rationnelle des racines, monodrome par rapport aux paramètres, soit invariable par les substitutions de ce groupe, et réciproquement. J'ai montré que ce groupe est contenu dans le groupe de l'équation et permutable à ses substitutions.

II.

APPLICATIONS DIVERSES.

J'ai fait de nombreuses applications de la théorie générale aux principales équations rencontrées jusqu'à ce jour dans les diverses branches de l'Analyse, et notamment :

1° Aux équations abéliennes, dont j'ai généralisé la définition et la théorie.

2° Aux équations de Galois.

3° A une famille d'équations signalées par M. Clebsch et dont l'équation connue de M. Hesse forme le premier terme.

4° A l'équation qui donne les seize points singuliers de la surface de M. Kummer. *Cette équation a une réduite du sixième degré* (résultat retrouvé par M. Klein).

5° A celle qui donne les seize droites des surfaces du quatrième degré à conique double. J'ai montré qu'elle est un cas particulier d'une famille d'équations de degré p^q, résolubles à l'aide d'une équation de degré q et de $q-1$ équations abéliennes de degré p.

6° A l'équation des vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre. *Cette équation n'est susceptible d'aucun abaissement.* Elle est intimement liée à l'équation des seize droites. Ce dernier résultat, que la théorie m'avait fait prévoir, a été vérifié par M. Geiser.

7° A une famille d'équations fournies par des problèmes de contacts, parmi lesquelles la plus simple est celle des vingt-huit doubles tangentes des courbes du quatrième ordre. *Cette équation ne peut être abaissée.*

Les équations de la division des transcendantes et les équations modulaires donnent lieu à une nouvelle série d'applications ; en voici les résultats les plus saillants :

1° *Les équations modulaires pour des transformations de degré n pre-*

mier et > 11 *ne sont susceptibles d'aucun abaissement de degré* (on sait au contraire que, si $n \overline{\gtrless} 11$, le degré peut être abaissé d'une unité).

2° *Les racines de l'équation qui donne la bissection des périodes dans les fonctions elliptiques ou hyperelliptiques sont des fonctions monodromes des modules* (résultat confirmé par M. Brioschi).

3° *L'équation de degré* $n^{2k}-1$, *qui donne la division des périodes par un nombre premier* n *dans les fonctions à* $2k$ *périodes, a pour groupe le groupe abélien.*

Elle n'est pas résoluble par radicaux (cette proposition, généralement admise, n'avait pas été démontrée).

Elle a, comme on sait, une réduite de degré $\frac{n^{2k}-1}{n-1}$; mais, *dans le cas de quatre périodes, il existe deux réduites distinctes et de ce degré.*

Ce fait de deux réduites différentes ayant le même degré n'avait encore été signalé qu'une fois, pour l'équation générale du sixième degré.

4° *Dans le cas particulier de la trisection des fonctions à quatre périodes, on obtient une autre réduite, du vingt-septième degré et semblable à l'équation aux vingt-sept droites.* Ce résultat, qui établit un nouveau lien entre les fonctions abéliennes et les problèmes de la Géométrie, a été confirmé par les travaux de MM. Clebsch et Cremona.

M. Clebsch a reconnu également, sur mes indications, que le problème de la réduction d'une forme du sixième ordre à la forme canonique $U^2 - V^3$ dépend de la trisection des fonctions à quatre périodes [1].

---

[1] Clebsch a rappelé cette circonstance dans son Mémoire (*Mathematische Annalen*, t. II, p. 96). Il termine ainsi : « Cette recherche est donc en même temps un commentaire algébrique des recherches générales par lesquelles M. Jordan a jeté un jour tout nouveau sur la théorie de cette classe d'équations. »

Les amis et disciples de Clebsch (MM. Brill, Gordan, Klein, Lüroth, Mayer, Nöther, Von der Mühll) ajoutent à ce sujet les phrases suivantes, dans leur Notice sur les travaux de ce grand géomètre : « Les recherches de Hesse et celles d'Abel avaient excité l'intérêt de Clebsch pour le côté algébrique des problèmes de Géométrie; plus tard, les relations multiples qu'il avait nouées avec Camille Jordan ramenèrent son attention vers tout ce qui se rattache aux groupements remarquables des racines d'une équation. Réciproquement, c'est principalement à lui qu'on est redevable d'avoir mis Camille Jordan en état de consacrer aux équations de la Géométrie un Chapitre spécial dans son grand Ouvrage. »

M. Sylvester a également apprécié, avec une extrême bienveillance, le résultat relatif à la trisection des périodes (*Bulletin de la Société mathématique de Londres*, 1863; *Mémoire sur la théorie des cyclodes réductibles*, p. 19).

5° Le phénomène d'abaissement qui vient d'être signalé paraît spécial au cas de la trisection. J'ai reconnu, en effet, que *l'équation de degré 156, dont dépend la quintisection, ne peut être abaissée* [1].

En essayant, en dernier lieu, d'étendre aux équations de degré supérieur la méthode de M. Hermite pour résoudre l'équation du cinquième degré par les fonctions elliptiques, j'ai obtenu les deux théorèmes suivants :

Les équations générales de la division des périodes des fonctions circulaires, elliptiques ou hyperelliptiques par un nombre impair, ne peuvent être d'aucun secours pour la résolution des équations générales de degré >5.

Tout au contraire, *la résolution d'une équation quelconque* $X=0$ *se ramène à celle de l'équation qui donne la bissection des périodes des fonctions hyperelliptiques formées avec* $\sqrt{X}$.

III.

RÉSOLUTION PAR RADICAUX.

Abel, ayant démontré que l'équation générale du cinquième degré n'était pas résoluble par radicaux, s'est trouvé conduit à poser le problème suivant :

Trouver toutes les équations d'un degré déterminé quelconque qui soient résolubles algébriquement.

Juger si une équation donnée est résoluble algébriquement ou non.

Son travail est resté inachevé. On voit, par les énoncés qui nous restent (les démonstrations sont perdues), qu'il avait résolu le problème pour les équations de degré premier. Il avait trouvé en outre que les équations *primitives,* solubles par radicaux, ont pour degré une puissance de nombre premier.

---

[1] Les calculs qui m'ont amené à ce dernier résultat étaient trop longs pour être publiés.

Galois fit faire un pas décisif à cette question en établissant la propriété caractéristique des équations résolubles.

L'énoncé qu'il en a donné revient au suivant :

Pour qu'une équation soit résoluble, il faut et il suffit que les facteurs de composition de son groupe soient premiers.

En cherchant à appliquer ce critérium, il a reconnu :

1° Que, si l'équation est de degré premier, il faut et il suffit que son groupe soit contenu dans le groupe linéaire;

2° Que, si l'équation est primitive, son degré doit être une puissance d'un nombre premier, telle que p^n, et que son groupe doit être contenu dans le groupe linéaire à n variables; mais cette condition est loin d'être suffisante.

Galois n'avait donné que de courtes indications sur la démonstration de ce dernier théorème; il a été établi depuis par M. Betti.

Enfin M. Kronecker a mis sous une forme canonique l'expression des racines des équations résolubles de degré premier p (sauf le cas où p est de la forme $8n+1$).

Le problème d'Abel, transformé par Galois, pouvait s'énoncer ainsi :

Construire les groupes dont les facteurs de composition sont premiers [1].

En étudiant cette question, j'ai reconnu qu'il convenait de remplacer le critérium de Galois par le suivant, qui lui est équivalent :

Pour qu'un groupe L *soit résoluble* (c'est-à-dire appartienne à une équation résoluble), *il faut et il suffit qu'on puisse déterminer une suite de groupes* 1, F, G, H, ..., L (commençant par un groupe qui ne contient d'autre substitution que l'unité et se terminant par L), *jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Chacun de ces groupes, tel que* G, *est contenu dans le suivant* H *et permutable aux substitutions de* L.

---

[1] Cet énoncé est en effet la traduction exacte de la première question posée par Abel. Pour résoudre la seconde, on n'aura qu'à s'assurer si le groupe de l'équation donnée est contenu dans l'un des groupes G trouvés comme caractérisant des équations résolubles. Il suffira pour cela de former, par la méthode des fonctions symétriques, l'équation à laquelle satisfait une fonction des racines, invariable par les substitutions de G, et de vérifier si cette équation a une racine rationnelle.

2° *Deux substitutions quelconques g, g_1, prises dans l'un de ces groupes*, G, *satisfont à une relation de la forme $gg_1 = g_1 gf$, f étant une substitution du groupe précédent* F.

On voit immédiatement la marche à suivre pour la construction des groupes cherchés. On formera successivement les groupes partiels F, G, ... A mesure que l'on avancera dans cette opération, le champ des recherches se rétrécira, les substitutions de L devant être permutables à chacun des groupes partiels déjà construits. Cette simplification n'aurait pas lieu si l'on employait le critérium de Galois sous sa forme primitive.

On devra d'ailleurs, dans la recherche des groupes résolubles, se borner à construire ceux qui ne sont contenus dans aucun groupe de même nature, mais plus général. Ces groupes caractérisent en effet les types généraux d'équations résolubles, dont tous les autres ne sont que des cas particuliers.

En suivant la marche qui vient d'être indiquée, je me suis trouvé conduit à traiter simultanément les trois problèmes suivants :

Problème A. — *Construire tous les groupes résolubles les plus généraux.*

Problème B. — *Construire les groupes résolubles les plus généraux parmi ceux qui sont contenus dans le groupe linéaire.*

Problème C. — *Construire les groupes résolubles les plus généraux parmi ceux qui sont contenus dans le groupe abélien ou dans l'un des deux groupes hypoabéliens.*

En effet, ces trois problèmes sont liés de telle sorte, que la solution de chacun d'eux, pour un degré donné, se ramène à celle des mêmes problèmes pour des degrés inférieurs [1]. On pourra donc les

---

[1] Cette liaison résulte des propositions suivantes :

1° *Pour construire les groupes résolubles les plus généraux de degré m* (problème A) *on décomposera m en un produit de facteurs successifs qui soient tous des puissances de nombre premier. A chacune de ces décompositions, telle que $m = p^n p'^{n'} \ldots$, correspond une classe de groupes, dont la détermination se déduit immédiatement de celle des groupes résolubles les plus généraux contenus dans les groupes linéaires de degrés p^n, $p'^{n'}$, ...* (problème B).

2° *Pour construire les groupes résolubles les plus généraux contenus dans le groupe li-*

résoudre pour un degré quelconque en abaissant ce degré, par une série de réductions, jusqu'à ce qu'il soit assez petit pour que la solution devienne intuitive. L'abaissement est extrêmement rapide, et sept à huit réductions au plus suffiront pour tout nombre inférieur à $10^{10^{12}}$.

Les groupes résolubles fournis par la méthode précédente sont presque tous généraux et distincts. Cette proposition souffre néanmoins quelques cas d'exception. Parmi les groupes obtenus, il en est donc un certain nombre que l'on doit rejeter, soit comme non généraux, soit comme formant double emploi. J'ai réussi à déterminer avec précision quelles sont les exclusions à faire pour qu'il ne reste plus que des groupes *généraux et distincts* (1).

Le problème d'Abel est donc entièrement résolu. La méthode qui conduit à ce résultat fournit d'ailleurs un système complet de classification pour les groupes trouvés et permet de les énumérer avec une extrême facilité. On est donc fondé à présumer que les complications que j'ai rencontrées ne tiennent pas au procédé employé, mais à la nature même du problème.

Comme spécimen de l'application de cette méthode, j'ai publié dans les *Comptes rendus* trois tables donnant :

La première, *le nombre des types résolubles et primitifs jusqu'au degré* 1000000;

---

néaire de degré p^n (problème B), *on posera* $n = \lambda\nu\pi^{\sigma}\pi'^{\sigma'}\ldots$, π, π', ... *étant des nombres premiers qui divisent* $p^{\nu}-1$. *A chaque décomposition de cette espèce correspond une classe de solutions, qui pourront se construire sans difficulté si l'on connaît les groupes résolubles les plus généraux pour le degré* λ (problème A) *et les groupes résolubles les plus généraux contenus dans les groupes abéliens (ou hypo-abéliens) de degrés* $\pi^{2\sigma}$, $\pi'^{2\sigma'}$, ... (problème C).

3° *Pour construire les groupes résolubles les plus généraux contenus dans le groupe abélien (dans l'un des groupes hypo-abéliens) de degré* p^{2n} (problème C), *on posera de même* $n = \lambda\nu\pi^{\sigma}\pi'^{\sigma'}\ldots$, π, π', ... *étant des nombres premiers qui divisent* $p^{2\nu}-1$, *et l'on n'aura plus qu'à résoudre le problème* A *pour le degré* λ *et le problème* C *pour les degrés* $\pi^{2\sigma}$, $\pi'^{2\sigma'}$, ...

(1) La méthode précédente résolvant simultanément les trois problèmes A, B, C, on doit démontrer trois théorèmes A, B, C pour établir que les groupes qu'elle fournit sont généraux et distincts. A cet effet, je fais voir que si l'un de ces théorèmes était faux pour un degré donné, l'un d'eux serait faux pour un degré moindre.

Cette démonstration repose sur certaines inégalités numériques, vraies en général, mais qui peuvent devenir inexactes pour certains nombres très petits. De là naissent les cas d'exclusion signalés dans le texte.

La deuxième, *le nombre total des groupes résolubles jusqu'au degré* 10000;

La troisième, *le tableau des congruences irréductibles à employer dans le calcul des groupes résolubles jusqu'au degré* 12000.

Je me suis également occupé du problème général suivant :

Déterminer les types d'équations irréductibles résolubles, non plus par radicaux, mais à l'aide d'irrationnelles d'une espèce donnée (par exemple à l'aide d'équations des m premiers degrés).

La question ne pouvait évidemment se résoudre complètement, tant qu'elle resterait posée dans des termes aussi généraux. Je suis néanmoins parvenu à diverses propositions qui circonscrivent le problème et le simplifient très notablement. Je montre en particulier qu'*on peut toujours le ramener au cas où l'équation est primitive.*

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

1° Systèmes d'équations linéaires a coefficients constants. — J'ai indiqué le moyen de les ramener à une forme canonique pour laquelle l'intégration se fasse immédiatement, quelles que soient les racines, égales ou inégales, de l'équation caractéristique.

J'en ai déduit une nouvelle démonstration de ce théorème, établi par MM. Weierstrass et Somoff, que les intégrales du système qui détermine les variations séculaires ne contiennent, en aucun cas, le temps hors des signes trigonométriques.

La même méthode est d'ailleurs applicable à l'étude des intégrales d'un système à coefficients variables aux environs d'un point critique.

2° Équations a coefficients variables. — On sait que les intégrales, en nombre infini, d'une équation linéaire d'ordre n s'expriment linéairement au moyen de n d'entre elles. Lorsque la variable indépendante décrit un contour fermé autour d'un point critique, ces intégrales éprouvent une substitution linéaire. Les substitutions correspondantes aux divers points critiques, combinées entre elles, forment un groupe dont l'étude mettra en lumière les propriétés fondamentales de l'équation différentielle.

J'ai donné à ce sujet la solution complète du problème suivant, qui avait été formulé par M. Frobenius et résolu par lui dans les cas les plus simples :

Connaissant les substitutions correspondantes à chaque point critique, déterminer, si elle existe, une équation linéaire d'ordre inférieur à l'équation proposée, et ayant avec elle des intégrales communes.

Si l'intégrale d'une équation différentielle linéaire est algébrique, son groupe ne contiendra qu'un nombre fini de substitutions, et réciproquement. La détermination des types d'équations différentielles algébriquement intégrables revient donc à celle des groupes d'ordre fini.

J'ai démontré à ce sujet le théorème général suivant :

Tout groupe G *d'ordre fini, contenu dans le groupe linéaire à p variables, contient un groupe* F *de substitutions de la forme*

$$|x, y, z, \ldots, \quad ax, by, cz, \ldots|,$$

auquel toutes ses substitutions sont permutables, et G *aura pour ordre λf, f étant l'ordre de* F *et λ un entier limité en fonction de p.*

Cet énoncé équivaut à celui-ci :

Si une équation différentielle d'ordre p a toutes ses intégrales algébriques, ces intégrales s'exprimeront linéairement par les racines d'équations binômes, dont les seconds membres sont des fonctions monodromes de la variable indépendante et des racines d'une équation auxiliaire $X = 0$. *Le degré λ de cette équation auxiliaire est limité en fonction de p.*

Si $p = 2$, on trouve aisément qu'il y a *cinq* types d'équations à intégrales algébriques; le nombre λ est au plus égal à 5. (Ces résultats avaient déjà été trouvés par M. Klein par une méthode moins directe.)

Une discussion analogue, mais plus difficile, montre que pour $p = 3$ il existe *douze* types.

Si λ surpasse 5, il est égal à 7 ou à 9. Dans le premier cas, $X = 0$ sera la réduite de l'équation modulaire pour la transformation du septième ordre; dans le second cas, ce sera une équation hessienne.

J'ai publié, dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, la première partie de la discussion pour $p = 4$.

6700 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.