Painlevé, Paul. **Notice sur les travaux scientifiques**

Paris, Gauthier-Villars, 1900.

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. PAUL PAINLEVÉ,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1900

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. PAUL PAINLEVÉ.

INTRODUCTION.

C'est aux équations différentielles analytiques que sont consacrés la plupart de mes travaux. Toutefois, les méthodes que j'ai dû employer, les applications que j'ai tentées m'ont conduit à m'occuper de sujets assez divers : théories des fonctions, des surfaces algébriques, des groupes continus ou discontinus, problème des n corps, etc. Mais si peu apparente que soit leur connexité, ces travaux ne s'en relient pas moins à la même idée générale, que je voudrais tout d'abord mettre en évidence.

Après l'invention du Calcul intégral, le problème qui s'imposa aux mathématiciens fut l'intégration des *équations différentielles* (à une ou plusieurs variables indépendantes). Les premiers efforts eurent pour but de représenter l'intégrale à l'aide des fonctions et symboles élémentaires connus. Quand on eut compris qu'une telle représentation était impossible en général, il fallut bien se résoudre à étudier directement, sur l'équation différentielle elle-même, les propriétés de l'intégrale.

Le développement naturel de cette étude conduisit bientôt les géomètres à embrasser dans leurs recherches les valeurs imaginaires de la variable aussi bien que les valeurs réelles. La théorie de la série de Taylor, celle des fonctions elliptiques, la vaste doctrine de Cauchy firent éclater la fécondité de cette généralisation. Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.

C'est à cette étude directe d'une équation différentielle quelconque (dans tout le champ réel ou complexe de la variable) que je me suis surtout attaché. J'ai cherché à obtenir sur la nature de l'intégrale, considérée comme fonction de la variable et des constantes, sur ses singularités, sur ses représentations possibles, quelques propositions générales qui fussent d'une application efficace; en particulier, je me suis efforcé de distinguer, parmi les équations différentielles, celles qui comportent, de par la théorie des fonctions, une *intégration parfaite*.

Je crois nécessaire de préciser le sens de ces derniers termes.

Après les recherches si longues et assidues de Legendre sur l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2), \tag{1}$$

la découverte qui fit la gloire d'Abel et de Jacobi fut la suivante :

L'intégrale $y(x)$ de (1) (irréductible aux fonctions connues) est représentable par le quotient de deux séries de Mac-Laurin, qui convergent pour toutes les valeurs (réelles ou complexes) de x [1]; les coefficients de ces séries sont calculables par dérivations successives.

L'intégration de l'équation (1) est ainsi *parfaite*, en ce sens que l'intégrale $y(x)$ est définie, dans tout son domaine d'existence, par un développement unique qu'on sait former et qui met en évidence ses propriétés.

Toute équation dont l'intégrale comporte une représentation analogue doit être regardée comme *intégrée* au sens moderne du mot. La détermination de telles équations constitue donc un problème capital qui a été, dans le cours de ce siècle et surtout dans ces vingt dernières années, l'objet de nombreux travaux. Mais toutes les équa-

(1) De telles fonctions sont dites *méromorphes*, parce qu'elles sont comparables, pour les valeurs finies de x, à une fraction rationnelle.

tions qu'on avait découvertes jusqu'ici par cette voie sont *intégrables* au sens vulgaire du mot, j'entends réductibles aux *quadratures* ou aux équations *linéaires*. Si l'on veut encore, c'est parce qu'on connait à l'avance la manière dont l'intégrale renferme les constantes qu'on sait élucider la nature de cette intégrale.

Je suis parvenu à former des types d'équations d'une espèce toute différente (irréductibles aux équations classiques) et qui se laissent intégrer à la façon de l'équation (1).

Ces équations peuvent se ramener aux types canoniques suivants :

$$y'' = \alpha y^2 + \beta x + \gamma, \tag{2}$$

$$y'' = \alpha y^3 + \beta x y + \gamma, \tag{3}$$

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right) \tag{4}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes numériques).

La plus simple de ces équations est l'équation (2); pour $\beta = 0$, cette équation définit les fonctions elliptiques; si β et α sont $\neq 0$, il est loisible (sans diminuer la généralité) de supposer $\alpha = 6$, $\beta = 1$, $\lambda = 0$. Dans l'équation ainsi réduite

$$y'' = 6y^2 + x,$$

posons

$$z = \frac{y'^2}{2} - 2y^3 - xy, \qquad u = e^{\int z\,dx};$$

la fonction $u(x)$ vérifie l'équation très simple du troisième ordre

$$\frac{z''^2}{2} + 2z'^3 + xz' - z = 0, \qquad \text{où} \qquad z = \frac{u'}{u};$$

elle est développable en une série de Mac-Laurin qui converge quel que soit x, et les coefficients de cette série se calculent par dérivations successives; enfin, $y(x)$ est représenté par le quotient

$$y(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\log u = \frac{u'^2 - uu''}{u^2}.$$

Il est impossible de n'être pas frappé de la quasi-identité qui existe entre cette représentation de $y(x)$ et la représentation de la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass à l'aide de la fonction entière σ.

Les intégrales des types (3) et (4) admettent une représentation analogue un peu plus compliquée qu'on trouvera indiquée dans le résumé analytique (§ 42).

J'insiste sur le caractère essentiellement nouveau de ces résultats. *Depuis la fondation du Calcul intégral, les types* (2), (3) et (4) *constituent le premier exemple connu d'équations qui se trouvent intégrées à l'aide de la théorie des fonctions sans être réductibles à aucune combinaison d'équations linéaires ou de quadratures.*

J'ajoute que la forme précise des types canoniques (2), (3) et (4) ne doit pas faire méconnaître le degré de généralité des équations différentielles qu'intègrent les nouvelles transcendantes. J'en donnerai une idée en disant que parmi les équations

$$y'' = a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x),$$

celles qui sont réductibles algébriquement à l'équation (2) forment une classe aussi étendue que la classe des équations linéaires, non homogènes, du second ordre.

On peut se demander comment un problème qui se trouvait posé en fait depuis les travaux d'Abel et de Jacobi a si longtemps attendu sa solution. La raison en est dans une difficulté d'une nature bien subtile que présente la théorie des équations différentielles : cette difficulté, c'est que chaque intégrale $y(x)$ d'une équation différentielle peut devenir indéterminée pour certaines valeurs de x, variables avec l'intégrale considérée et que rien ne met en évidence sur l'équation. Comment étudier l'intégrale dans le voisinage d'une telle valeur? Comment surtout décider si de telles singularités existent ou non? A ces questions, les doctrines classiques semblaient hors d'état de répondre. Il y avait là un obstacle qu'on pouvait à bon droit juger insurmontable. C'est l'opinion à laquelle aboutissait un des plus illustres géomètres contemporains, un de ceux dont les travaux ont le plus contribué à attirer l'attention des analystes sur l'importance et la difficulté de ce genre de problèmes. « On a fondé autrefois », écrivait en 1892 M. Émile Picard [1], « les plus grandes espérances sur » l'étude des équations différentielles; on pensait ainsi obtenir de

[1] *Comptes rendus*, t. CXIV, p. 1310; juin 1892.

» nombreuses classes bien définies de transcendantes nouvelles. Il » faut reconnaître que si on laisse de côté les équations linéaires, ces » espérances ont été jusqu'ici à peu près déçues. » Cet échec, M. Picard l'attribuait avec raison à l'obstacle que je viens de signaler. Un an plus tard, insistant à nouveau sur ces singularités si complexes des équations différentielles, M. Picard ajoutait ([1]) : « Ces réflexions ne sont » pas, en définitive, très encourageantes; il est peu probable que les » équations d'ordre supérieur [à points critiques fixes ([2])] puissent » conduire à l'étude de transcendantes nouvelles. »

Cet obstacle, qui s'opposait aux « grandes espérances fondées autrefois sur les équations différentielles », je suis parvenu à le surmonter dans le cours de ces trois dernières années. La méthode que j'ai employée n'est d'ailleurs qu'une application particulière — la plus précise et la plus importante, il est vrai — de mes travaux antérieurs sur les équations différentielles. Je voudrais donner brièvement un aperçu de ces travaux.

Avant de m'attaquer aux équations différentielles, j'ai dû, au préalable, approfondir la nature des singularités des fonctions analytiques (disposition des points singuliers, mode d'indétermination d'une fonction, uniforme ou non, dans le voisinage d'un point transcendant, etc.). J'ai dû aussi m'occuper de la représentation des fonctions : développement d'une fonction uniforme (à singularités quelconques) dans tout son domaine; développement explicite, sur tout le segment réel où elle est holomorphe, d'une fonction définie par une série entière, etc. Ayant eu à employer, dans l'étude de ce dernier problème, la *représentation conforme* d'une aire quelconque sur un cercle, j'ai levé toutes les difficultés, si délicates, relatives au contour de l'aire, difficultés que laissaient subsister les beaux travaux de M. Schwarz.

Plus tard, l'étude des équations différentielles à points critiques fixes m'a conduit à perfectionner l'importante théorie des transforma-

---

([1]) *Acta mathematica*, t. XVII, p. 300; 1893.

([2]) Les points critiques d'une intégrale $y(x)$ sont les points autour desquels deux branches au moins de $y(x)$ se permutent. Ces points sont dits *mobiles* ou *fixes*, suivant qu'ils varient ou non avec les constantes d'intégration.

tions *birationnelles* (ou simplement *rationnelles*) des courbes et des surfaces algébriques, et à aborder le problème, encore intact, des transformations BIUNIFORMES de ces surfaces. J'ai fait voir notamment que ces transformations *conservent les intégrales doubles de première espèce attachées aux surfaces,* au lieu qu'elles ne conservent pas, en général, les *différentielles totales de première espèce*. Ce théorème illustre la différence de nature qui sépare les *cycles* à une dimension des *cycles* à deux dimensions attachés à une surface algébrique; il permet d'étudier complètement les correspondances biuniformes entre surfaces de genre $p > 1$.

Ces études préliminaires m'étaient indispensables pour approfondir, dans le sens que je voulais, la théorie analytique des équations différentielles. Je poursuivais, en effet, un but bien déterminé : tandis que les doctrines classiques ne définissent l'intégrale que dans le voisinage des conditions initiales, je me proposais, en partant de ces conditions initiales, de poursuivre l'étude de l'intégrale dans tout le champ complexe de la variable.

Comme type des résultats généraux auxquels je suis parvenu je citerai le suivant :

Les intégrales $y(x)$ d'une équation différentielle du premier ordre, algébrique en y', y, x, ne peuvent admettre comme points singuliers transcendants que certains points fixes qui se déterminent algébriquement sur l'équation même.

Dès que l'ordre différentiel dépasse l'unité, le théorème précédent est en défaut : une intégrale $y(x)$ d'une équation du second ordre peut, je l'ai dit, devenir indéterminée pour des valeurs de x variables avec l'intégrale considérée. Les exemples où apparaissent ces singularités sont si simples qu'il ne semblait pas douteux qu'une équation prise au hasard en fût affectée. J'ai montré qu'il n'en était rien. Pour que de telles singularités existent, il faut que certaines conditions exceptionnelles soient remplies. De là, une division des équations du second ordre (ou d'ordre supérieur) en deux classes : une classe *générale* qui partage avec les équations du premier ordre certaines propriétés fondamentales et une classe *singulière* dont l'intégrale présente des complications d'une nature toute différente. C'est au sujet de ces résultats que M. Picard voulait bien écrire (¹) : « La grande » importance de la Note de M. Painlevé n'échappera à aucun analyste. » Sans avoir approfondi la question, je présumais que les équations » différentielles algébriques du second ordre avaient, *en général*, des » points singuliers essentiels mobiles : cette présomption n'était pas » juste. On vient de voir dans l'article de M. Painlevé qu'il y a seulement une classe singulière d'équations pouvant avoir des singularités essentielles mobiles. A la vérité, cette classe comprend toutes » les équations qui ont fait l'objet de mes recherches, c'est-à-dire les » équations dont l'intégrale, d'après ma terminologie, est à *apparence* » *uniforme*. J'espère que les recherches ultérieures de M. Painlevé » apporteront bientôt quelque lumière sur la classe singulière d'équations différentielles, si importante pour la définition de transcendantes nouvelles. »

C'est justement en élucidant à fond la théorie des équations singulières du second ordre que je suis parvenu aux *transcendantes méromorphes essentiellement nouvelles*, définies par les équations (2), (3) et (4) citées plus haut.

Mais les propositions générales dont je viens de parler comportent bien d'autres applications; je me bornerai à en indiquer deux, particulièrement précises.

1° J'ai résolu le problème suivant (²) :

Reconnaître si l'intégrale $y(x)$ *d'une équation donnée* $F(y', y, x) = 0$, *algébrique en* y, y', x, *est une fonction* TRANSCENDANTE *à un nombre fini* (NON DONNÉ) *de branches* (ou plus généralement à un nombre fini de branches permutables autour des points critiques mobiles).

Quand x ne figure pas dans l'équation, le problème coïncide soit avec le célèbre problème d'Abel (recherche des cas où une différentielle algébrique s'intègre par un seul logarithme), soit avec le problème de la réduction des intégrales abéliennes de première espèce aux intégrales elliptiques. On sait quelles difficultés arithmétiques soulèvent ces deux

(¹) *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 569; mars 1893.

(²) Un Mémoire consacré à ce problème a été couronné par l'Académie des Sciences (Grand Prix des Sciences mathématiques, 1890).

problèmes dans les cas très particuliers où on les a résolus. Il y avait lieu de penser que ces difficultés seraient plus profondes encore quand x figure dans F. Il n'en est rien; la question posée se traite *algébriquement* sauf pour des équations exceptionnelles qui s'intègrent par quadratures; pour ces équations, le problème est ramené explicitement au cas où x ne figure pas.

2° J'ai démontré le célèbre théorème de Weierstrass *sur les fonctions de n variables qui admettent un théorème d'addition*. Ce théorème, dont l'importance est considérable (dans l'étude des fonctions abéliennes, des surfaces algébriques, des équations différentielles, etc.) a été pris souvent comme point de départ par les élèves de Weierstrass, mais la démonstration de l'illustre géomètre allemand n'a jamais été ni publiée ni enseignée. Je suis parvenu à établir en toute rigueur cette proposition fondamentale, non sans rencontrer de très profondes difficultés.

Toutefois, c'est la détermination explicite des équations différentielles à intégrale *méromorphe* ou (plus généralement) *à points critiques fixes* qui constitue, je le répète, l'application la plus remarquable des généralités précédentes. Les équations à points critiques fixes, par l'intermédiaire desquelles il faut passer pour atteindre les équations dont l'intégrale est méromorphe ou uniforme, présentent par elles-mêmes un intérêt considérable. Elles constituent la généralisation naturelle des équations linéaires et partagent avec ces équations toutes les propriétés qui résultent de la fixité des points singuliers. *J'ai pu former explicitement toutes les équations du second ordre et du premier degré dont les points critiques sont fixes*, équations qui comprennent notamment les trois types irréductibles (2), (3) et (4). La méthode s'étend d'elle-même aux équations (algébriques) du second ordre non résolues en y''. Enfin, sur les équations du *troisième ordre* à points critiques fixes, dont l'étude est beaucoup plus difficile, j'ai obtenu récemment des résultats d'une très grande précision. Le problème de la détermination des équations différentielles à points critiques fixes (d'ordre supérieur à l'unité), qui semblait récemment encore inabordable, se trouve donc résolu aujourd'hui dans le cas du second ordre et assez avancé dans le cas du troisième pour qu'on puisse en croire la solution prochaine.

Mais ce n'est pas seulement comme types nouveaux d'équations intégrables ou comme sources de transcendantes nouvelles que les équations à points critiques fixes s'imposent à l'attention des géomètres. Elles se présentent d'elles-mêmes, et d'une façon bien inattendue, dans les théories les plus diverses. C'est ainsi qu'elles se relient étroitement, comme je l'ai montré, à la théorie des *groupes continus finis*. Le rôle qu'elles jouent dans la recherche des *intégrales premières des systèmes différentiels* est plus important encore. Je me bornerai à le faire ressortir sur les équations de la Dynamique.

« Dans un problème de Mécanique à n paramètres $x_1, \ldots, x_n$ (où ni les forces, ni les liaisons ne dépendent des vitesses), les intégrales premières rationnelles ou uniformes par rapport aux vitesses ne peuvent admettre (dans le champ des $x_1, \ldots, x_n, t$) de points critiques en dehors des valeurs (connues) des $x_1, \ldots, x_n, t$, pour lesquelles les équations du mouvement cessent d'être régulières. »

La détermination de ces intégrales premières dépend, par suite, d'équations différentielles à points critiques fixes.

Appliquée au *problème des n corps*, cette proposition m'a permis d'étendre les théorèmes bien connus de M. Bruns et de M. Poincaré, et de montrer qu'il ne saurait exister (en dehors des intégrales classiques) d'intégrale première algébrique ou uniforme par rapport aux vitesses (les coordonnées figurant d'une façon quelconque); j'ai pu établir par la même voie que *les conditions du choc* (*contrairement aux présomptions de certains astronomes*) *sont transcendantes*, et même transcendantes par rapport aux *vitesses* : j'entends par là que les conditions pour que deux au moins des n corps se choquent au bout d'un temps fini ne peuvent se traduire par des relations où les vitesses figurent algébriquement.

L'Académie a couronné (Prix Bordin, 1894) un Mémoire qui renfermait ces résultats et sur lequel le rapport [1] de la Commission s'exprimait en ces termes :

---

[1] Rapporteurs : MM. Poincaré, Picard, Appell.

« Dans la première Partie, sont développés des théorèmes d'un caractère très général offrant un grand intérêt analytique; ils sont relatifs aux intégrales premières d'un système d'équations de Lagrange.... Il est bien remarquable de voir intervenir ici tout naturellement une classe d'équations différentielles (les équations à points critiques fixes) qui a déjà fait l'objet de divers travaux, mais qui ne s'était présentée encore dans aucune application.... La Commission a été particulièrement frappée de l'originalité de cette première Partie, où l'auteur étudie de la manière la plus heureuse les équations de la Dynamique en se plaçant au point de vue de la théorie des fonctions. Elle est unanime à accorder le Prix Bordin au Mémoire inscrit sous le n° 3.... »

Jusqu'ici nous avons embrassé tout le champ (réel ou imaginaire) de la variable. Quand on se restreint au domaine *réel*, les résultats généraux que j'ai obtenus contribuent efficacement à l'étude *quantitative* de l'intégrale. La remarque suivante suffit à le faire comprendre : Admettons qu'on ait démontré que les intégrales d'un système différentiel réel ne présentent, dans le champ réel de la variable, d'autres singularités que des pôles; l'*intégration quantitative* du système est dès lors achevée, en ce sens qu'il est possible de représenter l'intégrale (définie par des conditions initiales réelles) à l'aide de séries qui convergent pour toutes les valeurs réelles de la variable. Or les méthodes que j'ai développées donnent précisément le moyen de reconnaître si les intégrales d'un système différentiel présentent ou non des singularités non polaires. C'est ainsi que j'ai pu signaler des classes très étendues d'équations différentielles (et notamment de problèmes de la Dynamique) qui comportent dans le champ réel une véritable intégration quantitative. La plupart de ces résultats se laissent d'ailleurs étendre, par la méthode tout élémentaire de Cauchy-Lipchitz, aux systèmes différentiels non analytiques. C'est cependant par l'étude approfondie des intégrales analytiques dans le domaine complexe que j'ai été mis en garde contre certaines singularités qui persistent dans le domaine réel et qui semblent avoir échappé à l'attention des géomètres. Il y a là une difficulté assez subtile sur laquelle je voudrais insister en prenant comme exemple, pour plus de clarté, le *problème des n corps*.

Représentons par $\rho(t)$ la plus petite (à l'instant t) des distances mutuelles des n corps. Le mouvement du système reste régulier et se laisse définir à l'aide de séries convergentes *tant que* $\rho(t)$ *ne s'annule pas*. Les géomètres étaient unanimes à en conclure que le mouvement reste régulier tant que deux des astres ne *se choquent* pas, c'est-à-dire tant que deux (au moins) des points du système ne viennent pas coïncider en un certain point de l'espace. Cette conclusion n'est pas légitime, du moins sans une discussion préalable; elle serait sûrement vraie si (quand t tend vers un certain instant t_1) les astres tendaient nécessairement vers des positions déterminées; mais rien ne prouve qu'il en soit ainsi; on peut choisir des lois d'attraction entre quatre points matériels, par exemple, telles que, t tendant vers t_1, les quatre points restent à une distance finie sans tendre vers aucune position limite; $\rho(t)$ tend vers zéro avec $(t - t_1)$ sans que la distance de deux points particuliers tende constamment vers zéro. Qu'une telle hypothèse soit inadmissible, c'est ce qui n'est nullement évident *a priori*, et je ne suis arrivé à le démontrer que *dans le cas de trois corps*.

Le problème des trois corps (mais non celui des n corps) serait donc résolu au point de vue *quantitatif*, si l'on connaissait avec précision les conditions initiales qui correspondent à un choc. J'ai dit plus haut que ces conditions n'étaient pas susceptibles, malheureusement, d'une définition *algébrique;* le seul but qu'on puisse se proposer, c'est donc de les calculer avec une approximation indéfinie. J'ai commencé, il y a quatre ans, l'étude de ces conditions; mais, entraîné presque aussitôt par d'autres recherches, je n'ai eu le temps ni de l'achever, ni d'en publier les premiers résultats. Je voudrais, du moins, faire connaître en deux mots le point où je l'ai laissée : le cas où deux des corps seulement se choquent est à peu près élucidé, grâce à cette remarque bien simple que l'action du troisième corps devient négligeable dès que les deux corps sont très voisins, mais je n'ai rien pu obtenir encore sur le cas où les trois corps (supposés de masse finie) se choquent à la fois.

Pour n quelconque, j'ai donné du moins du problème quantitatif la solution imparfaite suivante : « Les conditions initiales du système étant données, on peut calculer, au bout du temps T, la position des astres avec une approximation ε, ou bien décider si la distance de deux au moins de ces astres est devenue, dans cet intervalle, p fois moindre que leur distance actuelle $\left(T, \frac{1}{\varepsilon}, p\right.$ sont donnés d'avance aussi grands qu'on veut$\left.\right)$. »

La méthode de Cauchy-Lipchitz suffit à traiter la question avec un nombre fini d'opérations (nombre qu'on peut limiter à l'avance, une fois T, ε, p choisis). En combinant cette méthode avec les méthodes classiques de l'Astronomie, on rendrait les calculs réalisables.

Dans le domaine de recherches ouvert par M. Poincaré sur les propriétés *qualitatives* des intégrales, j'ai trouvé aussi quelques résultats nouveaux. J'ai discuté notamment les trajectoires d'un système matériel *dans le voisinage d'une position d'équilibre*. J'ai démontré l'*instabilité* de l'équilibre dans des cas étendus qui échappaient aux méthodes de MM. Liapounoff, Kneser, Hadamard. J'ai établi très simplement l'existence (dans le voisinage d'une position d'équilibre *ordinaire*) des petits mouvements *périodiques*, étudiés par M. Poincaré ; comme application, j'ai fait voir qu'un corps solide pesant, fixé par un *quelconque* de ses points, comporte une infinité (à deux paramètres) de mouvements périodiques.

Mais je veux surtout signaler les petits mouvements périodiques des systèmes *dont la période est très longue quand leur amplitude est très petite*. La méthode de M. Poincaré suppose essentiellement que la période des oscillations considérées reste inférieure à une limite donnée quand leur amplitude tend vers zéro. Or, dès que la fonction des forces (développée dans le voisinage de la position d'équilibre) commence par des termes de degré supérieur au second, de tels petits mouvements n'existent plus, au lieu que des exemples très simples (à un paramètre) mettent en évidence des oscillations *dont la période croît indéfiniment quand l'amplitude tend vers zéro*. L'étude de tels mouvements semblait exiger une méthode entièrement nouvelle. J'ai pu cependant, à l'aide d'un artifice assez simple, établir l'existence de petits mouvements périodiques à très longue période, dans le cas *général* où, la position d'équilibre étant stable, la fonction des forces commence par des termes de degré supérieur au second.

Je dirai quelques mots, en terminant, de deux ordres de travaux qui ne se rattachent d'aucune manière aux précédents et auxquels j'ai été conduit par mon enseignement. Les premiers sont relatifs à la transformation des équations de la Dynamique, les seconds à la Mécanique analytique du frottement.

Transformation des equations de la Dynamique. — Le problème, tel que je le pose, généralise à la fois le problème de la représentation géodésique des surfaces et les élégantes recherches de M. Appell sur *l'homographie en Mécanique*.

Considérons une surface S et un point M mobile sans frottement sur S sous l'action d'une force quelconque F qui ne dépend que de la position de M. Appelons *famille de trajectoires* la famille de courbes à trois paramètres décrites par M. *Étant données deux familles de trajectoires, tracées, l'une sur une surface* S, *l'autre sur une surface* S_1, *existe-t-il entre* S *et* S_1 *une correspondance ponctuelle qui transforme l'une dans l'autre les deux familles de trajectoires?*

Cette question comprend évidemment l'étude des familles de trajectoires qui admettent une transformation ponctuelle (et notamment une transformation continue) en elles-mêmes. Si on laisse de côté le cas banal où la correspondance réalise l'application de S sur S_1 ou sur une homothétique de S_1, la question se relie intimement à l'existence d'*intégrales quadratiques* des géodésiques de S. J'en ai donné, ainsi que des questions connexes, une solution explicite et complète, en dépit des intégrations qui semblaient s'introduire. J'ai étendu le problème et une grande partie des résultats aux ds^2 à n dimensions [1], c'est-à-dire aux problèmes de Dynamique à n paramètres.

Mécanique analytique du frottement. — J'ai cherché à développer pour les systèmes doués de frottement une doctrine analogue à la Mécanique analytique des systèmes sans frottement. Cette extension semble devoir présenter un intérêt véritable quand on passe de la Mécanique rationnelle à la Mécanique physique et à la Thermodynamique. J'ai donné une définition générale des forces de frottement, des forces de liaison, de la loi *rationnelle* de frottement (propre à un système), loi

---

[1] Je me suis trouvé là en contact sur quelques points avec M. R. Liouville.

distincte de la loi *empirique* de frottement, mais qui s'en déduit. Cette étude m'a conduit à une conclusion inattendue : c'est que les lois classiques du frottement de glissement sont logiquement absurdes dès que le coefficient de frottement devient un peu considérable (tout en restant inférieur aux valeurs qu'on lui attribue d'après l'expérience). La vraie raison de la contradiction c'est que la rugosité des surfaces en contact n'altère pas seulement la composante tangentielle, mais aussi la composante normale de la réaction.

Admettons, par exemple, comme postulat, que, dans le frottement de deux solides l'un sur l'autre, la composante tangentielle T de la réaction soit une fonction de la composante normale N, soit $T = F(N)$, la fonction F ne dépendant que de la nature superficielle des deux éléments en contact et de leur vitesse relative. Pour qu'une telle loi ne conduise pas à des contradictions, il faut que $\frac{F(N)}{N}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{N}$.

J'ai indiqué quelques cas particuliers très simples où les lois ordinaires du frottement ne sauraient se vérifier. Il serait facile et intéressant de réaliser ces expériences.

Telles sont, dans leurs grandes lignes, les quelques idées générales qui ont inspiré mes recherches. On trouvera, dans les pages qui suivent, une analyse détaillée des résultats auxquels je suis parvenu et dont je n'ai pu qu'indiquer, dans cette Introduction, les plus caractéristiques.

RÉSUMÉ ANALYTIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS.

Singularités des fonctions analytiques.

1. J'ai approfondi la nature des diverses singularités que peut présenter, dans son domaine d'existence, une fonction analytique *uniforme ou non*.

Certains esprits seraient enclins à penser que ce sont là des généralités inutiles et qu'il suffit de se limiter aux singularités les plus simples. Une telle restriction est évidemment légitime quand on étudie la théorie des fonctions *en soi;* c'est ainsi qu'on a le droit de choisir, comme sujet de recherches, la classe des fonctions uniformes qui n'ont que des points singuliers isolés. Mais, quand on considère les fonctions engendrées par un procédé analytique déterminé (comme une intégrale définie, une équation différentielle, etc.), on ignore à l'avance les modes de singularités qu'introduit cette génération, et les exemples les plus naturels font apparaître des complications bien imprévues. Sous peine de commettre de graves erreurs, il faut donc se mettre en garde contre les différentes circonstances qui sont susceptibles de se produire.

2. *Singularités des fonctions uniformes.* — C'est aux fonctions *uniformes* (¹) que je me suis attaché tout d'abord [3, 63] (²). Les

(¹) Il suffit, pour la suite, d'admettre que la fonction est uniforme dans le domaine du plan où l'on fait varier la variable complexe x.

(²) Les chiffres placés entre crochets renvoient aux numéros de la liste des travaux.

points singuliers d'une telle fonction jouissent de la propriété que *leur ensemble renferme ses points-limites*. Inversement, quand un ensemble E de points satisfait à cette condition, il existe une infinité de fonctions uniformes dont les points singuliers constituent l'ensemble E. Il suit de là que cet ensemble peut affecter les dispositions les plus variées, comprendre des *espaces lacunaires*, des *lignes singulières* (pourvues ou non de tangentes), etc. C'est pourquoi j'ai dû commencer par préciser la notion de *ligne*.

M'appuyant sur les travaux de M. G. Cantor, j'appelle avec lui ensemble *continu* de points tout ensemble parfait bien enchaîné, et je définis une ligne comme un ensemble continu de points du plan *qui ne comprend aucune aire* (1). Cette définition, comme il résulte aisément de la théorie de M. Cantor, est bien adéquate à la notion ordinaire de ligne. Quand l'ensemble continu comprend des aires, il est dit *superficiel*. Les *points-frontières* d'un ensemble superficiel forment un ensemble composé de lignes (dont certaines peuvent se réduire à un point) et qui renferme ses points-limites.

J'ai été amené aussi à distinguer les *ensembles parfaits* de points qui ne comprennent pas d'ensemble *continu*, en trois catégories, de la manière suivante :

Supposons, comme il nous est loisible de le faire, tous les points de l'ensemble à distance finie. L'ensemble étant partout discontinu, on peut enfermer les points de l'ensemble dans un nombre fini d'aires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, toutes extérieures les unes aux autres et intérieures chacune à un cercle de rayon ε choisi d'avance aussi petit qu'on veut. Représentons par L_ε la longueur totale des périmètres des aires α. Trois cas se présentent :

1° L_ε tend vers zéro avec ε (si l'on choisit convenablement les aires α) ;

2° Le premier cas n'est pas réalisé, mais L_ε reste du moins inférieur à une certaine limite quand ε tend vers zéro (les aires α étant convenablement choisies) ;

3° L_ε croît indéfiniment avec $\frac{1}{\varepsilon}$, de quelque manière qu'on choisisse les aires α.

(1) J'entends par là qu'il n'existe aucune aire finie dont tous les points fassent partie de l'ensemble.

Je conviens de dire qu'un ensemble parfait discontinu de points est *ponctuel* dans le premier cas, *semi-linéaire* dans le second, *semi-superficiel* dans le troisième.

3. Appliquons cette terminologie à l'étude d'une fonction uniforme $f(x)$ dans le voisinage d'un point singulier non polaire $x=a$. Les principaux résultats que j'ai obtenus se résument ainsi :

Si le point singulier a est *isolé* ou limite de points singuliers isolés, l'indétermination de la fonction est, comme on sait, complète dans le voisinage de $x=a$; d'une façon précise, en vertu d'un théorème de M. Picard, $y(x)$ acquiert une infinité de fois toutes les valeurs sauf deux ou plus.

Ce cas écarté, l'ensemble E des points singuliers voisins de a est nécessairement *parfait*, mais deux cas sont possibles :

Premier cas. — L'ensemble E est discontinu;

Second cas. — L'ensemble E comprend des lignes, c'est-à-dire que le point a fait partie d'une ligne singulière ou encore est un point-limite de lignes singulières (qui tendent à se réduire à ce point).

Dans le premier cas, si l'ensemble discontinu E est *ponctuel*, j'ai montré très simplement que l'indétermination de $y(x)$ pour $x=a$ est complète. Si l'ensemble E est *semi-linéaire* et surtout s'il est *semi-superficiel*, l'étude de l'indétermination de $f(x)$ exige des méthodes plus délicates.

4. Dans le second cas, j'ai précisé par des exemples les circonstances très diverses qui se présentent; la fonction peut être déterminée (ainsi que ses premières dérivées ou toutes ses dérivées); elle peut être indéterminée soit *complètement*, soit *incomplètement*. J'ai été conduit ainsi à introduire [63, 97] la notion nouvelle de *domaine d'indétermination d'une fonction $y=f(x)$ en un point singulier $x=a$.*

Voici la définition que j'ai donnée de ce domaine, définition qui convient aussi bien aux fonctions *non uniformes :*

Soit l un chemin quelconque aboutissant [1] au point a et sur lequel $y(x)$ est holomorphe. Traçons, de a comme centre, un cercle γ de

[1] Le chemin l peut avoir une longueur infinie et admettre le point a comme point asymptote.

rayon ε, prenons un point x_0 sur la partie de l attenante à a et intérieure à γ, et faisons varier x arbitrairement *dans* γ à partir du point x_0, en évitant toute singularité de $y(x)$. Les positions correspondantes de $y(x)$ épuisent un certain domaine D_ε; d'une façon précise, je représente par D_ε l'ensemble de ces positions *et de leurs points-limites*. Quand ε tend vers zéro, D_ε tend vers un certain ensemble continu d'un seul tenant D qui peut se réduire à un point (notamment au point à l'infini). Si D se réduit à un point, la fonction $y(x)$ considérée est déterminée; sinon la fonction est indéterminée et c'est D que j'appelle *domaine d'indétermination de* $y(x)$ *pour* $x = a$. L'indétermination est *complète* quand D embrasse tout le plan (ainsi qu'il arrive toujours si le point singulier a est isolé). L'indétermination est *incomplète* dans le cas contraire; j'ai donné des exemples de fonctions uniformes douées de points singuliers pour lesquels D se réduit à une *aire* finie ou à une *ligne*.

5. *Théorèmes sur les lignes singulières*. — Quand une fonction uniforme $y(x)$ est déterminée en tous les points d'une ligne singulière, j'ai établi [3] sur sa continuité le long de cette ligne et sur la continuité de ses dérivées, certaines propositions assez délicates et fort utiles. J'en ai déduit un criterium pour reconnaître si une fonction uniforme, définie d'un certain côté d'une *coupure*, est *prolongeable* ou non au delà de cette coupure, et j'ai appliqué ce criterium à des classes étendues de fonctions, notamment aux fonctions représentées par des intégrales définies. J'ai mis en évidence certaines particularités remarquables telles que l'existence d'expressions analytiques qui n'ont dans tout le plan, comme singularité, qu'une coupure ouverte et qui sont *prolongeables* d'un côté de cette coupure et non de l'autre.

Mais le théorème auquel j'attache le plus d'importance est le suivant [3] :

Deux fonctions définies d'un même côté d'une ligne L *et qui coïncident sur une portion de cette ligne, si petite qu'elle soit, coïncident identiquement.*

Quand les deux fonctions sont holomorphes sur L, c'est là un théorème classique qui joue un rôle fondamental dans la théorie des fonctions. L'extension (qui n'allait pas sans difficultés) de ce théorème au cas où les deux fonctions admettent L comme ligne singulière, m'était indispensable pour les problèmes que j'avais en vue. Mon but était en effet, une fois constituée une théorie générale des fonctions uniformes, de découvrir dans l'immense famille de ces transcendantes celles qui comportent une définition *naturelle* (définition par les relations implicites, ou par les équations différentielles algébriques, etc.). Je voulais notamment, parmi ces divers modes de génération, déterminer les plus simples qui puissent donner naissance à des fonctions uniformes affectées de coupures essentielles.

6. Voici les conclusions les plus caractéristiques auxquelles je suis parvenu [3] dans cette voie :

Représentons par $F(x, y)$ une fonction analytique des deux variables x, y, qui reste méromorphe quand x et y varient, x dans un certain domaine D et y dans tout son plan, et considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y); \tag{1}$$

toute intégrale $y(x)$ *de* (1) *qui dans* D *est uniforme ou n'acquiert qu'un nombre fini de branches ne peut admettre dans ce domaine, comme points singuliers non algébriques, que certains points fixes*. Ces points coïncident nécessairement avec les points $x = a$ (du domaine D) où $F(x, y)$ est infini quel que soit y.

Le même théorème s'applique aux fonctions *implicites* $y(x)$ définies par la relation

$$F(x, y) = 0.$$

Plus généralement, le théorème subsiste si, pour x arbitrairement choisi dans D, $F(x, y)$ est une fonction de y *à n branches* et n'admet, dans tout le plan des y, qu'un nombre *fini* de points singuliers transcendants $y = g(x)$ (points dont les affixes dépendent *analytiquement* de x). Il suffit même que ces points singuliers $y = g(x)$ forment, pour x donné, un ensemble *dénombrable*. Les points transcendants de l'intégrale $y(x)$ dans D coïncident alors nécessairement avec les points $x = a$ qui sont singularités (polaires ou non) de $F(x, y)$ quel que soit y.

Une conséquence de ces théorèmes, c'est que *l'intégrale générale*

$y(x)$ *d'une équation* (1) *ne peut être une fonction uniforme* (*ou à* q *branches*) *sans que* $F(x, y)$ *soit algébrique en* y.

Supposons maintenant que (pour x pris arbitrairement dans D) les singularités $y = g(x)$ de la fonction uniforme (ou à n branches) $F(x, y)$ forment un ensemble non dénombrable mais qui ne comprend pas de *ligne :* une intégrale $y(x)$ de (1), uniforme (ou à q branches) dans D, *ne peut être affectée de lignes singulières*.

Ces théorèmes sont en défaut quand $F(x, y)$ est une fonction à une *infinité* de déterminations, lors même que toutes les singularités de $F(x, y)$ sont algébriques.

Dans le cas du *second ordre*, en me restreignant aux équations différentielles algébriques, j'ai établi [36, 37, 63] que, si l'intégrale générale est uniforme (ou a ses points critiques fixes), cette intégrale est nécessairement dépourvue de lignes singulières. Les équations du *troisième ordre* sont les premières qui puissent conduire (et qui conduisent en effet) à des fonctions uniformes affectées de coupures.

J'ai fait voir enfin [63] que ces fonctions uniformes bien connues, qui restent continues ainsi que toutes leurs dérivées sur une ligne singulière, ne sauraient vérifier aucune équation différentielle algébrique.

Par la suite, j'ai poussé beaucoup plus loin l'étude des équations différentielles algébriques en employant d'autres méthodes; mais c'est celle-là qui m'a guidé.

7. *Singularités des fonctions analytiques non uniformes.* — J'ai divisé [3, 63, 97] les points singuliers (non algébriques) d'une fonction multiforme $y(x)$ en points *essentiels* et points *transcendants ordinaires*, suivant que la fonction est ou non *indéterminée* au point singulier.

Une difficulté se présente ici, que l'on ne rencontrait pas dans l'étude des fonctions uniformes : dans le voisinage du point singulier (qui peut être point-limite de points critiques), il importe de préciser la ou les branches de la fonction $y(x)$ que l'on considère. On y parvient grâce à la notion du *domaine d'indétermination* que j'ai introduite plus haut (§ 4).

Soient l un chemin quelconque aboutissant au point a et $y(x)$ une branche de fonction holomorphe sur l, mais qui admet le point a

comme point singulier. Le domaine d'indétermination, pour $x = a$, de cette fonction $y(x)$ est un ensemble continu bien défini D, qui peut se réduire à un point (notamment au point $y = \infty$). Si D se réduit à un point, la branche de fonction $y(x)$ a une valeur déterminée pour $x = a$; le point singulier est un point *transcendant ordinaire* de $y(x)$. Dans le cas contraire, $x = a$ est un point *essentiel*.

Ce que je viens de dire n'implique aucune restriction quant aux singularités de $y(x)$: le point a peut appartenir à une coupure ou être point-limite d'autres singularités. Mais je me suis attaché spécialement au cas où ce point a est un point singulier *isolé* de la branche de fonction $y(x)$. Quand la fonction $y(x)$ n'a qu'un nombre fini de branches qui se permutent autour du point a, ce point singulier (non algébrique) de $y(x)$ est nécessairement un point essentiel dans le voisinage duquel $y(x)$ atteint une infinité de fois toutes les valeurs, sauf deux ou plus. Mais quand une infinité de valeurs de $y(x)$ se permutent autour du point a, le point a peut être point transcendant ordinaire $\left(\text{Exemples : } y = \log x,\ y = \frac{1}{\log x}\right)$ ou point essentiel [1]; dans ce dernier cas, l'indétermination peut être *complète* (Exemple : $y = x^i$) ou *incomplète* [Exemple : $y = (\log x)^i$; le domaine d'indétermination pour $x = 0$ est une couronne circulaire].

Ces dernières singularités (points essentiels d'indétermination incomplète) sont extrêmement remarquables, en ce sens qu'elles entraînent pour la fonction multiforme inverse $x(y)$ l'existence de lignes singulières plus ou moins compliquées. Parmi les modes de génération des transcendantes, j'ai cherché quels étaient les plus naturels qui pouvaient donner naissance à une telle singularité. J'ai obtenu, notamment, *sur les équations différentielles algébriques* le théorème suivant :

Quand l'équation est du premier ordre, aucune intégrale ne peut présenter de points d'indétermination incomplète. Quand l'équation est du second ordre, il peut exister de tels points singuliers, mais ces points sont

---

(1) J'ai distingué les points essentiels en points *semi-essentiels* et points *essentiels proprement dits* suivant que $y(x)$ tend ou non vers une limite quand x tend vers a sans tourner indéfiniment autour de lui. Exemple : $x = 0$ est un point semi-essentiel de $y = x \log x$, et un point essentiel proprement dit de $y = x^i$.

des points fixes en nombre fini et leurs affixes se calculent algébriquement sur l'équation différentielle. Quand l'équation est du troisième ordre, ces points peuvent varier avec les constantes et être en nombre infini pour chaque intégrale.

Il est facile, d'ailleurs, de former des exemples très simples d'équations du second ordre et du troisième ordre qui donnent lieu aux particularités indiquées.

Le théorème précédent jouait un rôle fondamental dans la première méthode qui m'a permis de déterminer les équations du second ordre à points critiques fixes (*voir* le § 40). Ce n'est que plus tard que j'ai trouvé un mode d'exposition plus élémentaire, mais moins suggestif.

8. J'ai discuté les divers modes de branchement d'une fonction multiforme. J'ai donné des exemples de fonctions multiformes qui n'admettent comme singularités que des *coupures* et aucun point critique proprement dit. J'ai signalé aussi des fonctions multiformes dont toutes les branches (sauf une seule) présentent une même ligne singulière fermée, en sorte que la même fonction analytique n'a qu'une détermination dans une partie du plan et en admet deux ou une infinité dans le reste du plan. Toutes ces particularités interviennent dans la théorie des équations différentielles.

J'ai insisté enfin sur la disposition des singularités d'une fonction multiforme. Quand la fonction a une infinité de branches, l'ensemble des points singuliers ne renferme pas, en général, ses points-limites : c'est ainsi qu'il existe des fonctions multiformes dont les points singuliers (tous algébriques) épuisent les points du plan de coordonnées rationnelles. Il en va tout autrement quand la fonction n'a qu'un nombre fini de branches; l'ensemble des singularités renferme ses points-limites, et j'ai étendu aux points singuliers d'une telle fonction toutes les propriétés énoncées pour les fonctions uniformes. J'ai établi notamment ce théorème qui m'a été très utile dans l'étude des équations différentielles :

Soit $y(x)$ une transcendante à n déterminations. Si la fonction inverse $x(y)$ ne possède, dans tout son domaine d'existence, qu'un nombre fini de déterminations, l'ensemble des points singuliers de $y(x)$ est composé de lignes ou d'ensembles parfaits semi-superficiels.

Représentation des fonctions analytiques.

9. *Représentation d'une fonction uniforme à singularités quelconques.* — M. Runge a établi, au sujet de la représentation des fonctions uniformes, deux théorèmes fondamentaux :

« Théorème I. — Toute fonction (ou expression) analytique uni-
» forme $y(x)$ est représentable par une série de fractions rationnelles
» $\Sigma R_n(x)$. La série converge uniformément dans tout le domaine à
» l'intérieur (et sur le contour) duquel $y(x)$ est holomorphe. »

« Théorème II. — Si les points singuliers de $y(x)$ forment un
» ensemble continu, d'un seul tenant, comprenant le point $x = \infty$, il
» est loisible, dans le théorème I, de remplacer les fractions ration-
» nelles R_n par des polynomes (¹). »

J'ai donné [3, 70, 71] de ces deux théorèmes de M. Runge une démonstration intuitive qui tient en quelques lignes. Je les ai complétés par plusieurs propositions qui réunissent, en quelque sorte, les résultats de M. Runge et les résultats classiques de Weierstrass et de M. Mittag-Leffler. Je citerai seulement les deux suivantes :

1° Désignons par a un quelconque des points singuliers *isolés* de $y(x)$ et par b un quelconque de ses points singuliers *non isolés*. La fonction (ou expression) $y(x)$ est représentable par une série $\Sigma\chi_n(x)$, où $\chi_n(x)$ admet comme pôles ou points essentiels un nombre fini de points a et b, ces derniers étant tous des pôles, et chaque point a ne figurant que dans un seul terme χ_n.

2° Soient E l'ensemble des points singuliers de $y(x)$, et e l'ensemble obtenu en remplaçant chaque ensemble continu compris dans E par un de ses points arbitrairement choisi. La fonction $y(x)$ est représentable par une série $\sum \frac{P_n(x)}{[(x-a)(x-b)]^n}$, où a, b désignent deux points de e (variables avec n) et P_n un polynome.

Quand la fonction $y(x)$ est holomorphe ou méromorphe dans une

(¹) En particulier, toute fonction holomorphe dans une aire fermée est développable dans cette aire en série de polynomes. De même, la fonction $\frac{1}{1-x}$ est développable en une série de polynomes qui converge dans tout le plan, sauf sur l'axe positif réel entre 1 et $+\infty$.

aire à contour simple, j'ai indiqué une représentation de la fonction qui met en évidence ses *zéros* et ses *pôles;* cette représentation est tout à fait analogue à la décomposition en produit (ou en quotient) d'une fonction entière (ou méromorphe) dans tout le plan.

10. *Représentation d'une branche holomorphe de fonction.* — Quand l'aire considérée A est *convexe*, ces représentations deviennent particulièrement élégantes et simples. Soit x_0 un point intérieur à A : *Toute fonction $f(x)$ holomorphe dans A est développable en une série de polynomes $\Sigma P_n(x)$, où P_n est linéaire et homogène en $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$.*

En appliquant ce théorème à une suite d'aires convexes qui s'aplatissent indéfiniment sur l'axe réel, je suis parvenu [72, 84, 85] [1] à une proposition qui ne concerne que les valeurs *réelles* de x, mais dont on conçoit aussitôt l'importance dans la théorie des équations différentielles. Cette proposition s'énonce ainsi :

On peut former (et d'une infinité de manières) une suite à double entrée de polynomes, à coefficients numériques, soit la suite

$$(\Pi_{1,0}, \Pi_{1,1}), \quad \ldots, \quad (\Pi_{n,0}, \Pi_{n,1}\, \Pi_{n,2}, \ldots, \Pi_{n,n}), \quad \ldots, \tag{2}$$

telle que la série

$$\Sigma P_n(x) \equiv (n)\Sigma[f(0)\Pi_{n,0} + f'(0)\Pi_{n,1} + f''(0)\Pi_{n,2} + \ldots f^{(n)}(0)\Pi_{n,n}] \tag{3}$$

converge et représente $f(x)$ sur tout le segment de l'axe positif réel compris entre l'origine et le premier point singulier a (d'affixe réel et positif) de $f(x)$.

La série (3) converge uniformément, ainsi que toutes les séries dérivées terme à terme, sur tout segment $\overline{ob}$ (b positif et $< a$). La fonction $f(x)$ désigne une fonction quelconque, holomorphe pour $x = 0$.

La série (3) *diverge, en général, en dehors de l'axe positif réel.*

Si au lieu de cet axe on considère une demi-droite issue de l'origine et d'argument α, il suffit de changer x en $xe^{i\alpha}$ pour être en état d'appliquer le théorème : mais le développement ainsi obtenu dépend de α et ne converge que sur la direction α.

---

(1) J'ai enseigné cette proposition et je l'ai appliquée aux équations de la Mécanique dans un cours professé au Collège de France (décembre 1896).

Depuis lors, M. Mittag-Leffler est arrivé à un résultat extrêmement remarquable : il a formé des séries de polynomes composés linéairement, comme les précédents, avec $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... et qui convergent sur chaque demi-droite issue de l'origine jusqu'au premier point singulier de $f(x)$. Le domaine ainsi défini $\left[\text{qui comprend le cercle de convergence de la série de Mac-Laurin } f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\ldots\right]$ est dit *étoile de convergence* de la série.

Il semble, à première vue, en comparant les domaines de convergence, qu'il doive exister une différence essentielle entre les développements (3) et ceux de M. Mittag-Leffler. Il n'en est rien : pour passer des séries (3) à celles de M. Mittag-Leffler, *il suffit dans* (3) *de faire* $x=1$ *et de remplacer chaque* $f^{(i)}(0)$ *par* $x^i f^{(i)}(0)$.

La démonstration du théorème de M. Mittag-Leffler à laquelle on parvient ainsi, met en évidence une foule de généralisations de ce théorème, et permet notamment [85] de passer sans difficulté du cas d'une variable au cas de p variables (1).

Fonctions de plusieurs variables. — Considérons, pour fixer les idées, une fonction f de trois variables x, y, z; les développements que nous introduisons sont des séries de polynomes $\Sigma P_n(x, y, z)$, dont chaque terme P_n est une combinaison linéaire et homogène (à coefficients *numériques*) de f_0, $(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0})$, ..., $(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0})^{(n)}$; f_0, f'_{x_0}, ... désignent les valeurs de f, f'_x, ... pour $x=y=z=0$.

La fonction f étant une fonction quelconque holomorphe pour $x=y=z=0$, la série $\Sigma P_n(x, y, z)$ converge dans une *étoile* qui se définit géométriquement dans l'espace à six dimensions, exactement comme pour les fonctions d'une variable. Bornons-nous, pour plus de clarté, aux valeurs réelles de x, y, z : la série $\Sigma P_n(x, y, z)$ converge, dans l'espace réel $oxyz$, sur toute demi-droite issue de l'origine jusqu'au premier point singulier de $f(x, y, z)$. L'étoile *réelle* de convergence est ainsi définie.

Ces développements sont appelés à jouer un rôle important dans la

(1) L'étude des développements des fonctions de plusieurs variables m'a amené à préciser un point important de la théorie des séries entières : j'ai défini le domaine exact de convergence d'une série de Mac-Laurin (à p variables) quand on groupe ensemble dans la série les termes de même degré.

théorie des équations aux dérivées partielles. Supposons que l'équation soit linéaire et homogène par rapport aux dérivées partielles d'un certain ordre et que ses coefficients soient des constantes (ou des formes homogènes et de même degré des variables). Appliquons les développements précédents à une intégrale analytique d'une telle équation : ces développements ΣP_n sont dérivables terme à terme indéfiniment et, d'après sa composition même, *chaque terme* P_n *vérifie l'équation aux dérivées partielles.*

Par exemple, toute fonction harmonique $V(x, y, z)$, régulière à l'origine, est développable en une série de *polynomes harmoniques* qui converge dans l'*étoile* où la fonction V reste régulière.

11. *Développement des fonctions réelles non analytiques.* — Je me suis occupé aussi [73] du développement des fonctions réelles (non analytiques). Soit $f(x, y, z)$ une telle fonction : j'ai montré qu'on peut former des séries de polynomes $\Sigma P_n(x, y, z)$ qui jouissent des propriétés suivantes :

1° La série converge uniformément et représente $f(x, y, z)$ dans tout domaine (à trois dimensions) où $f(x, y, z)$ est continue;

2° Les séries déduites de la première en la dérivant terme à terme jouissent de la même propriété relativement aux dérivées correspondantes de $f(x, y, z)$.

Si notamment f est continue dans un volume D, ainsi que toutes ses dérivées (surface-limite comprise), la série converge uniformément dans D ainsi que toutes les séries dérivées.

Considérons, d'après cela, une fonction (ou expression) analytique *uniforme* qui dépend de deux (ou de plusieurs) variables complexes. Soit

$$f(x, y) = f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) + i f_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$$
$$(x = x_1 + i x_2, y = y_1 + i y_2).$$

En appliquant le théorème précédent à chaque fonction f_1, f_2, on voit qu'on peut représenter (*dans tout son domaine*) la fonction uniforme $f(x, y)$ par *une série de polynomes*

$$\Sigma [P_n(x_1, x_2, y_1, y_2) + i Q_n(x_1, x_2, y_1, y_2)],$$

mais la combinaison $P_n + iQ_n$ *n'est pas un polynome en* x, y. Les dérivées f'_x, f'_y, ... seront représentées par les séries $\sum\left(\frac{\partial P_n}{\partial x_1} + i\frac{\partial Q_n}{\partial x_1}\right)$, ... Si paradoxal qu'il paraisse, ce mode de développement est le seul qu'on connaisse encore pour représenter les fonctions analytiques uniformes de plusieurs variables à singularités quelconques.

12. *Représentation conforme.* — Dans l'étude du développement d'une fonction à l'intérieur d'une aire convexe, j'ai eu recours à la fonction de Green, autrement dit à la fonction qui effectue la représentation conforme de l'aire convexe sur un cercle. Comme je devais employer cette fonction jusque sur le *contour* de l'aire, il m'a fallu compléter [3, 19] les beaux Mémoires de M. Schwarz sur un point particulièrement délicat. Quand le contour de l'aire à représenter n'est pas analytique, les démonstrations de M. Schwarz offrent, en effet, une lacune : elles établissent bien qu'il y a une correspondance univoque entre les points *intérieurs* des deux aires, mais cette correspondance s'étend-elle aux points des contours eux-mêmes? C'est ce qui n'est nullement évident et ce que supposent cependant toutes les applications classiques de la représentation conforme. Sous la seule condition que le contour admette une *tangente continue* (sauf peut-être en un nombre fini de points anguleux), j'ai fait voir que les deux contours se correspondent bien point par point, et que la correspondance reste *conforme sur le contour*, sauf aux points anguleux où les angles sont réduits dans le rapport $\frac{\alpha}{\pi}$ (α angle des deux tangentes).

Plus généralement, soit $x(s)$, $y(s)$ les coordonnées d'un point du contour, dont l'arc est s. Si, le long de l'élément AB du contour, $x(s)$ et $y(s)$ ont des dérivées continues d'ordre q, la fonction $X = \varphi(x)$, qui effectue la représentation, *est continue ainsi que ses* $(q-1)$ *premières dérivées sur* AB.

Ces propositions sont utiles dans la théorie des *équations aux dérivées partielles*, lorsque les conditions aux limites sont des valeurs données sur un contour fermé $\left(\text{par exemple dans le problème de Dirichlet où l'on se donne } \frac{dV}{dn}\right)$. Elles s'appliquent notamment aux contours analytiques qui ne sont pas réguliers en chaque point; par exemple, aux contours formés de plusieurs arcs analytiques distincts.

Je me suis occupé aussi [12] de la représentation conforme dans l'espace à trois dimensions. J'ai montré (en me servant des paramètres d'Olinde Rodrigue) que certaines propriétés très simples suffisent chacune à caractériser l'*inversion* parmi toutes les transformations ponctuelles : ces propriétés sont relatives à la conservation des angles (théorème classique), à la transformation du problème de Dirichlet, à la conservation des systèmes triples orthogonaux, etc.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTIONS TRANSCENDANTES SPÉCIALES. — FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES.

Fonctions abéliennes et généralisations.

13. *Théorie des fonctions abéliennes.* — Weierstrass a construit une théorie des fonctions abéliennes sur cette proposition fondamentale :

« Quand n fonctions $x, y, z, \ldots$ de n variables $u, v, w, \ldots$ admettent un théorème d'addition, ce sont des combinaisons algébriques de fonctions abéliennes (ou de dégénérescences). »

Je rappelle que, par définition, les n fonctions $x, y, z, \ldots$ de $u, v, w, \ldots$ admettent *un théorème d'addition* si les valeurs de $x, y, z, \ldots$ pour les valeurs $u+u_0$, $v+v_0$, $w+w_0$, ... des variables s'expriment algébriquement en fonctions des valeurs de $x, y, z, \ldots$ pour $u, v, w, \ldots$ et pour $u_0, v_0, w_0, \ldots$.

Les fonctions que nous appelons *abéliennes* sont les fonctions méromorphes $2n$ fois périodiques de n variables, représentables par le quotient de séries θ. Elles deviennent des dégénérescences quand, dans les séries θ, un ou plusieurs systèmes de périodes tendent vers zéro ou l'infini.

La démonstration de Weierstrass, très simple dans le cas d'une variable, n'a jamais été ni publiée ni enseignée dans le cas de deux ou plusieurs variables; elle est aujourd'hui perdue.

L'importance et la beauté de ce théorème, les nombreuses applications qu'il comporte, non seulement dans la théorie des fonctions abéliennes, mais encore dans la théorie des surfaces algébriques, des groupes continus, des équations différentielles, etc., rendaient bien désirable qu'il fût enfin établi. Les seuls travaux qui, à ma connaissance, se rapportent à la question sont ceux de M. Picard sur les surfaces algébriques, mais, en dépit des profondes recherches de l'illustre analyste, le théorème restait à démontrer.

Plaçons-nous, pour plus de simplicité, dans le cas de deux variables.

Un raisonnement tout élémentaire ramène aussitôt la question au problème de l'inversion uniforme de deux intégrales de différentielles totales

$$J = \int P\,(x, y, z,)\,dx + Q\,(x, y, z,)\,dy,$$
$$J_1 = \int P_1(x, y, z,)\,dx + Q_1(x, y, z,)\,dy$$

attachées à une surface algébrique

$$S\,(x, y, z,) = 0.$$

D'une façon précise, considérons le système différentiel

$$(1) \qquad \begin{cases} du = P\ dx + Q\ dy, \\ dv = P_1 dx + Q_1 dy; \end{cases}$$

toute la question revient à caractériser les cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, définies par (1), *sont uniformes et de plus renferment algébriquement les constantes* x_0, y_0 (valeurs de x, y pour $u = 0$, $v = 0$).

Quand les intégrales J et J_1 sont de *première espèce*, le problème est résolu; les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ ont quatre paires de périodes distinctes, et les travaux bien connus de Weierstrass, de MM. Appell, Picard, Poincaré permettent de les ramener aux fonctions θ.

Mais le cas où les intégrales J et J_1 sont de *seconde* ou de *troisième espèce* présente de très profondes difficultés. J'ai pu l'élucider complètement [53, 54, 63] et j'ai fait voir que, conformément au théorème de Weierstrass, les fonctions uniformes correspondantes se confondent avec les dégénérescences classiques des fonctions hyperelliptiques.

14. La méthode que j'ai employée s'applique d'ailleurs à un nombre quelconque de variables et démontre, par suite, sous sa forme la plus étendue, le théorème de Weierstrass.

Elle m'a donné aussi la solution d'un problème connexe avec le précédent et d'un grand intérêt analytique : je veux parler du problème qui consiste à *déterminer tous les systèmes* (1) *qui définissent des fonctions* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *uniformes*, sans faire l'hypothèse que x et y renferment algébriquement les constantes x_0, y_0.

Les fonctions uniformes ainsi définies sont des combinaisons de transcendantes classiques, mais non point des fonctions abéliennes (ou dégénérescences). Je signale notamment un cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ présentent des singularités *essentielles* à distance finie et possèdent *quatre paires distinctes de périodes qui ne satisfont pas à la relation de Riemann*.

L'étude directe du système (1) dans le cas de deux et de n variables m'a permis de constituer toute une théorie des fonctions abéliennes sans rien emprunter à la doctrine des courbes algébriques ou des séries θ. J'ai retrouvé également par cette voie, sans considérations arithmétiques, quelques-uns des plus importants résultats de Weierstrass, de M. Picard et de M. Poincaré sur la réduction des périodes des intégrales abéliennes.

15. *Généralisations des fonctions abéliennes et fuchsiennes*. — Les travaux que je viens d'exposer me conduisaient naturellement [53, 63] à donner un sens plus large aux mots *théorème d'addition*. Soient $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v,)$, $z = \chi(u, v)$ trois fonctions quelconques de u, v, fonctions qui sont liées évidemment par une relation

$$S(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

transcendante ou algébrique. Si l'on appelle (X, Y, Z), (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) les valeurs de (φ, ψ, χ) qui correspondent respectivement aux valeurs $(u + u_0, v + v_0)$, (u, v), (u_0, v_0) des variables, les trois systèmes (X, Y, Z), (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) vérifient l'équation (2), et quand on élimine u, v, u_0, v_0 entre ces systèmes, on exprime X, Y, Z en fonction de x, y, z, x_0, y_0, z_0, à savoir

$$\left\{\begin{aligned} X &= F(x, y, z, x_0, y_0, z_0), \\ Y &= G(x, y, z, x_0, y_0, z_0), \\ Z &= H(x, y, z, x_0, y_0, z_0). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si F, G, H sont *rationnels* en x, y, z, x_0, y_0, z_0, les fonctions φ, ψ, χ admettent un théorème d'addition et sont hyperelliptiques. Convenons de dire que φ, ψ, χ admettent un théorème *univoque* d'addition quand F, G, H sont, non plus rationnels, mais *uniformes* en x, y, z, x_0, y_0, z_0. Voici quelques conséquences de cette définition :

Quand φ, ψ, χ admettent un théorème univoque d'addition,

1° φ, ψ, χ sont des fonctions uniformes de u, v (méromorphe si les F, G, H sont méromorphes);

2° Ces fonctions vérifient un système différentiel

$$(4)\qquad \begin{cases} du = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy, \\ dv = P_1(x, y, z)\,dx + Q_1(x, y, z)\,dy, \end{cases}$$

où les seconds membres sont des différentielles exactes [en tenant compte de (2)] et où P, Q, P_1, Q_1 sont uniformes en x, y, z.

Inversement, si les fonctions x, y, z de u, v définies par un tel système (4) sont uniformes, elles admettent un théorème univoque d'addition.

Toute la question serait donc de déterminer les systèmes (4) dont l'intégrale $x(u, v)$, $y(u, v)$ est uniforme.

Trois hypothèses sont possibles :

1° La surface $S = 0$ et les fonctions P, Q, P_1, Q_1 sont transcendantes;

2° La surface $S = 0$ est algébrique, mais les fonctions P, Q, P_1, Q_1 sont transcendantes;

3° La surface $S = 0$ et les fonctions P, Q, P_1, Q_1 sont algébriques.

Les deux derniers cas se rattachent aux transformations *biuniformes* des surfaces algébriques (*voir* le § 21). Je n'ai pu épuiser jusqu'ici que le troisième cas, qui conduit effectivement à certaines fonctions uniformes admettant un théorème univoque (et non rationnel) d'addition, mais ces fonctions, comme je l'ai dit, sont des combinaisons de transcendantes classiques.

16. J'ai tenté, dans une autre voie, une généralisation à la fois des fonctions abéliennes et des fonctions fuchsiennes.

Les fonctions elliptiques ou fuchsiennes $x(u)$ sont caractérisées par cette propriété que les valeurs de u qui correspondent à une valeur de x se laissent déduire d'une d'entre elles (ou d'un nombre fini d'entre elles) par un groupe infini de transformations homographiques.

Je me suis proposé [29, 42] de déterminer toutes les fonctions uniformes $x(u)$, telles que les valeurs de u correspondant à la même valeur de x se laissent déduire d'une d'entre elles u_1 (ou d'un nombre fini d'entre elles) par des transformations algébriques

$$(5)\qquad P(u, u_1) = 0,$$

où P est un polynome en u, u_1 de degré *donne*.

Le résultat est malheureusement négatif; toutes les fonctions ainsi définies se déduisent des fonctions fuchsiennes (et dégénérescences) par un changement algébrique de la variable. Pour le voir, j'ai montré d'abord que tout groupe *infini* discontinu de transformations (5) est nécessairement un sous-groupe d'un groupe continu fini algébrique; d'autre part, tout groupe continu algébrique est réductible (par un changement algébrique effectué sur u) soit au groupe homographique, soit au groupe défini par la formule d'addition de la fonction sn; mais les groupes infinis contenus dans ce dernier groupe ne sauraient être *discrets*. On est ainsi ramené aux groupes fuchsiens.

Le problème s'étend naturellement aux fonctions de plusieurs variables. Cherchons à déterminer toutes les fonctions uniformes $x(u, v)$, $y(u, v)$, telles que les couples (u, v) correspondant au même système (x, y) se déduisent d'un (ou de plusieurs) d'entre eux (u_1, v_1) par des transformations algébriques [1]:

$$(6) \qquad P(u, v, u_1, v_1), \qquad Q(u, v, u_1, v_1),$$

où P et Q sont de degré *donné* en u, v_1, u_1, v_1.

Là encore, je montre que tout groupe *infini* discontinu de transformations (6) est compris dans un groupe continu fini algébrique. La détermination explicite de ces derniers groupes (*voir* le § 19) m'a permis alors de voir que, moyennant un changement algébrique effectué sur u, v, tous les groupes infinis *discrets* cherchés sont des sous-groupes des groupes canoniques continus à deux variables énumérés par Sophus Lie (parmi lesquels on ne garde que les types algébriques). Ces groupes discontinus comprennent notamment les groupes hyperfuchsiens et hyperabéliens de M. Picard, qui en semblent les types les plus remarquables. Il y aurait pourtant intérêt à former des fonctions uniformes correspondant à d'autres types et vérifiant, comme les fonc-

---

[1] Je me suis posé aussi ce problème auquel s'appliquent des conclusions identiques : « Déterminer les fonctions uniformes $x(u)$, telles que les valeurs de u correspondant à une valeur de x se déduisent d'un couple (ou de plusieurs couples) u_1, u_2 d'entre elles par des transformations algébriques

$$P(u, u_1, u_2) = 0,$$

où P est un polynome en u, u_1, u_2 de degré donné ».

tions hyperfuchsiennes, un système différentiel algébrique. Toutefois, je n'ai pas poussé la question plus loin. En voici la raison : Ces travaux remontent à une période où, n'espérant plus former directement les équations différentielles d'ordre supérieur à points critiques fixes, je m'étais résigné à suivre une voie détournée ; je cherchais donc à construire des transcendantes nouvelles satisfaisant à des équations différentielles algébriques. Plus tard, ayant repris avec succès l'étude des équations différentielles, j'ai laissé de côté ce genre de problèmes.

Courbes et surfaces algébriques.

17. *Transformations rationnelles des courbes algébriques.* — Dans le domaine algébrique, ce sont surtout des transformations rationnelles des courbes et des surfaces algébriques que je me suis occupé. Ces transformations interviennent d'elles-mêmes dans la théorie des équations différentielles. Soient

$$C(x, y) = 0, \qquad \Gamma(X, Y) = 0$$

deux courbes algébriques, la première de genre p, la seconde de genre p' ; admettons qu'on puisse passer de la première à la seconde par la transformation

$$(T) \qquad x = r(X, Y), \qquad y = r_1(X, Y),$$

où r et r_1 sont rationnels en X, Y. Je désigne par μ le nombre de points de Γ qui correspond à un point de C. Si $\mu = 1$, la transformation est birationnelle et p est égal à p'. Dans tous les cas, p' est au moins égal à p et la formule de Zeuthen donne, si p est plus grand que 1,

$$\mu \leqq \frac{p'-1}{p-1}.$$

Cette formule montre que si $p' = p > 1$, la transformation est nécessairement birationnelle. Il en va tout autrement si $p' = p = 0$ ou 1.

Cela posé, les propositions que j'ai obtenues [6, 18, 63] se résument ainsi :

Les deux courbes Γ et C étant données, si p est plus grand que 1, il n'existe entre elles qu'un nombre fini de transformations de passage (T), et ces transformations se calculent à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques. Si $p = 1$, il existe une infinité de transformations (T) dès qu'il en existe une seule; ces transformations dépendent d'une constante et au moins d'un entier arbitraires; μ croît indéfiniment avec l'entier arbitraire. Si $p = 0$, il est bien évident qu'il existe toujours entre C et Γ une infinité de transformations (T) qui dépendent d'une fonction rationnelle arbitraire.

Supposons maintenant la courbe Γ donnée *seule;* elle n'est, en général, la transformée rationnelle d'aucune courbe C *de genre p plus grand que* 1; quand il existe de telles courbes C, *elles forment un nombre fini de classes* et l'on sait calculer *algébriquement* un type de chaque classe. Pour qu'il existe une courbe C *de genre un*, il faut qu'une intégrale de première espèce attachée à Γ n'ait que deux périodes. Cette condition remplie, il existe une infinité de courbes C (distinctes) de genre un dont le module dépend d'un entier arbitraire.

Enfin, si Γ est hyperelliptique, il en est de même *a fortiori* de C.

Ces résultats se rattachent évidemment à la transformation des fonctions fuchsiennes et à la réduction des intégrales abéliennes.

18. *Transformations rationnelles des surfaces algébriques.* — J'ai insisté sur ces théorèmes très simples pour éclairer les propositions analogues qui s'appliquent aux transformations rationnelles des surfaces [14, 15, 63]. Soient

$$S(x, y, z) = 0, \qquad \Sigma(X, Y, Z) = 0$$

deux surfaces algébriques telles que la transformation rationnelle

$$\text{(T)} \qquad x = r(X, Y, Z), \qquad y = r_1(X, Y, Z), \qquad z = r_2(X, Y, Z)$$

fasse passer de S à Σ. Je représente par μ le nombre des points de Σ qui correspondent à un point de S, par m le degré de S, par p son genre, par p_1 le genre de l'intersection G de S avec une quelconque de ses *adjointes* Q [de degré $(m-4)$]; p', p'_1 désignent les entiers analogues attachés à Σ. On a dans tous les cas

$$p' \geqq p, \qquad p'_1 \geqq p_1,$$

et (si $p_1 > 1$) :

$$\mu \leqq \frac{p'_1 - 1}{p_1 - 1}.$$

Si μ est égal à 1, c'est-à-dire si la transformation est *birationnelle*, p' est égal à p, p'_1 à p_1; inversement, si $p_1 = p'_1 > 1$, μ est égal à 1 et p' à p.

Pour aller plus loin, je distinguerai, parmi les surfaces S de genre $p > 1$ (les seules que nous considérons), celles qui jouissent de cette propriété connue : deux adjointes quelconques Q qui ont un point commun sur S (en dehors des points singuliers) ont sur S une ligne commune. Je donne à ces surfaces le nom de surfaces *spéciales*. Quand une surface est spéciale, la courbe G se décompose en courbes de genre un; dans tous les autres cas, p_1 est plus grand que 1.

Cette définition admise, supposons données les deux surfaces S et Σ. Si la surface S n'est pas *spéciale* ($p > 2$), il ne saurait exister qu'un nombre fini de transformations (T), et ces transformations se calculent à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques. Si la surface S est *spéciale*, il peut exister une infinité de transformations (T) qui dépendent d'une constante et d'entiers arbitraires; la constante n'apparait que si le module des courbes G de S est constant; les entiers permettent à μ de croître indéfiniment.

Quand la surface Σ est spéciale, il en est de même, *a fortiori*, de S; dans ce cas, p peut être égal à p' sans que la transformation soit birationnelle.

Supposons, enfin, la surface Σ donnée *seule* : les surfaces S *non spéciales* dont elle est la transformée rationnelle *forment un nombre fini de classes*, et l'on sait déterminer algébriquement un type de chaque classe [1]. Quant aux surfaces S *spéciales*, leur recherche se ramène au problème de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques.

19. *Transformations birationnelles des surfaces*. — Passons au cas où la transformation (T) est *birationnelle*. J'ai réussi [51, 63] à compléter les théorèmes fondamentaux de M. Picard sur les surfaces algébriques qui admettent un groupe continu *fini* de telles transformations. M. Picard a établi que ces surfaces jouissent d'une des deux propriétés suivantes :

« Ou bien elles possèdent un faisceau linéaire de courbes de genre zéro ou de courbes de genre un (à module constant) ;

» Ou bien il existe deux intégrales de différentielles totales attachées

---

(1) Deux surfaces (comme deux courbes) sont de la même classe quand elles se correspondent birationnellement.

à la surface dont l'inversion conduit à des fonctions uniformes qui renferment rationnellement les constantes d'intégration x_0, y_0, z_0. »

Du théorème de Weierstrass une fois démontré (§ 13), il résulte que les surfaces de la seconde catégorie sont des surfaces hyperelliptiques ou des dégénérescences.

Quant aux surfaces de la premiere catégorie, certaines conditions supplémentaires sont nécessaires pour qu'au faisceau de courbes uni cursales ou elliptiques corresponde effectivement une transformation birationnelle infinitésimale de la surface. J'ai donné ces conditions sous une forme précise.

C'est ce qui m'a permis de *déterminer explicitement tous les groupes continus finis algébriques à deux variables*. Moyennant une transformation *algébrique* effectuée sur les variables, tous ces groupes se ramènent soit aux types *canoniques* énumérés par Sophus Lie (où l'on ne garde que les types algébriques), soit aux types définis par les formules d'addition des fonctions *hyperelliptiques* (et dégénérescences).

Les résultats précédents s'étendent d'ailleurs aux surfaces algébriques à n dimensions.

20. L'ensemble des transformations birationnelles d'une surface forme toujours un groupe G, mais quatre circonstances peuvent, *a priori*, se présenter sur lesquelles j'ai attiré l'attention :

1° G peut être un groupe continu infini, sans sous-groupe continu fini;

2° G peut être un groupe continu fini ou renfermer un tel sous-groupe;

3° G peut être un groupe discontinu infini;

4° G peut être un groupe discontinu fini.

Si les cas 2° et 4° sont classiques, on ne connait pas encore d'exemple du cas 1°. Quant au cas 3°, M. Humbert en a fourni le premier un exemple dans ses brillantes recherches sur les fonctions abéliennes à multiplication complexe. Après la publication de M. Humbert, j'ai indiqué [75] des types extrêmement simples de surfaces qui présentent la même particularité; signalons entre autres les surfaces (de genre un) :

$$z^3 = \frac{1-x^2}{1-y^2}, \qquad z^4 = \frac{1-x^2}{1-y^2}, \qquad z^2 = \frac{4x^3 - g_2 x - g_3}{4y^3 - g_2 y - g_3}.$$

La dernière (mais non les deux précédentes) est une dégénérescence de surface de Kummer; le groupe de ses transformations birationnelles dépend de trois entiers arbitraires.

21. *Transformations biuniformes des surfaces.* — A l'inverse des courbes, les surfaces algébriques peuvent admettre des transformations biuniformes ([1]) qui ne sont pas birationnelles. Par exemple, les égalités

$$(7) \qquad x = X, \quad y = Ye^{X} \quad \text{ou} \quad X = x, \quad Y = ye^{-x}$$

définissent une transformation biuniforme du plan en lui-même. Cette transformation jouit de la propriété que les droites $x =$ const. restent des droites; mais la combinaison de deux transformations telles que (7), soit

$$x = x_1 e^{y_1}, \quad y = y_1 \quad \text{et} \quad x_1 = X, \quad y_1 = Ye^{X},$$

conduit à une transformation biuniforme qui ne laisse algébrique aucune courbe algébrique.

J'ai divisé, d'après cela [39, 55, 63], les transformations biuniformes en deux classes, suivant qu'il existe ou non une famille de courbes algébriques qui reste algébrique dans la transformation; je conviens de dire que la transformation est *semi-transcendante* dans le premier cas, *essentiellement biuniforme* dans le second.

J'ai pu faire une théorie complète des transformations *semi-transcendantes*. J'ai montré que, si deux surfaces se correspondent par une transformation biuniforme semi-transcendante (mais non birationnelle), chacune des surfaces correspond birationnellement à un cylindre ou possède un faisceau linéaire de courbes de genre un. Ces conditions ne sont pas suffisantes pour que la transformation existe; mais je les ai complétées algébriquement, et *j'ai donné la forme explicite des transformations biuniformes*. Par la marche même de la méthode, tout revient à étudier successivement les correspondances birationnelles entre deux couples de courbes algébriques.

([1]) De telles transformations existeraient pour les courbes si l'on considérait des fonctions uniformes affectées de *lignes singulières*. Je me limite, pour les surfaces, bien que cette restriction soit trop étroite, aux transformations telles que leurs singularités transcendantes forment sur chaque surface une courbe algébrique.

J'ai insisté notamment sur les surfaces qui admettent un groupe continu de transformations biuniformes. Les surfaces qui possèdent un faisceau linéaire de courbes elliptiques correspondant à une transformation birationnelle continue sont particulièrement intéressantes; en outre du groupe de transformations rationnelles, elles possèdent une infinité (continue) de transformations biuniformes qui conservent toutes les intégrales de différentielles totales de première espèce attachées à la surface, *sauf une seule*.

Qu'une transformation biuniforme soit ou non semi-transcendante, j'ai pu établir qu'elle possède, dans tous les cas, une propriété bien remarquable : *elle conserve les intégrales doubles de première espèce attachées à la surface transformée*.

Nous venons de dire qu'elle ne conserve pas nécessairement les intégrales de différentielle totale de première espèce. La raison profonde de cette différence, c'est que les *cycles* générateurs des périodes sont à deux dimensions pour les intégrales doubles et à une seule pour les différentielles totales.

Une conséquence de ce théorème, c'est que toute correspondance biuniforme *entre deux surfaces de genre* $p > 1$ est nécessairement semi-transcendante. Les seules surfaces pour lesquelles la théorie des transformations biuniformes n'est pas achevée sont donc les surfaces de genre zéro ou un.

On pourrait penser que toute transformation essentiellement biuniforme est la résultante de plusieurs transformations semi-transcendantes. Il n'en est rien; je l'ai montré par des exemples. J'ai déterminé notamment toutes les transformations essentiellement biuniformes définies par un système quelconque

$$p\,(x, y, z)\,dx + q\,(x, y, z)\,dy = \mathrm{P}\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\,d\mathrm{X} + \mathrm{Q}\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\,d\mathrm{Y},$$
$$p_1(x, y, z)\,dx + q_1(x, y, z)\,dy = \mathrm{P}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\,d\mathrm{X} + \mathrm{Q}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\,d\mathrm{Y},$$

dont l'intégrale *générale* est uniforme, qu'on prenne comme variables x, y, z ou X, Y, Z. (Les deux membres de chaque équation sont des différentielles totales exactes, attachées respectivement aux deux surfaces.) J'ai obtenu ainsi entre deux certaines surfaces hyperelliptiques (de classe différente), entre deux cylindres

$$y = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y} = \sqrt{(1 - \mathrm{X}^2)(1 - \mathrm{K}^2 \mathrm{X}^2)},$$

entre un tel cylindre et un plan, entre deux plans enfin, des correspondances biuniformes *qui ne sauraient s'obtenir par la combinaison de transformations semi-transcendantes.*

Tous les résultats qui précèdent relatifs aux transformations rationnelles ou biuniformes des courbes et des surfaces jouent un rôle considérable dans la théorie analytique des équations différentielles. En particulier, les correspondances biuniformes que j'ai signalées en dernier lieu interviennent dans l'étude d'un certain type d'équations différentielles du second ordre, à points critiques fixes [équation (VIII) du § 40], quand on regarde l'intégrale comme fonction des constantes.

TROISIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Théorie analytique des équations différentielles du premier ordre.

22. Pour prolonger dans tout le champ complexe l'étude de l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation différentielle d'ordre quelconque, j'ai pris comme point de départ les théorèmes fondamentaux de Cauchy. J'ai commencé [63, 95] par préciser ces théorèmes en regardant $y(x)$ comme fonction de x et des conditions initiales x_0, $y_0, y'_0, y''_0, \ldots$. Quand $x, x_0, y_0, y'_0, \ldots$ varient dans le voisinage de $x = a$, $x_0 = a$, $y_0 = b$, $y'_0 = c$, ... (a, b, c, ... désignant des valeurs de x, y, y', ... pour lesquelles l'équation est *régulière*), l'intégrale $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0, \ldots)$ est une fonction holomorphe de toutes les variables $x, x_0, y_0, y'_0, \ldots$. De cette simple remarque j'ai déduit une démonstration intuitive de ce théorème qui a donné lieu à tant de discussions et dont l'importance est capitale : « En dehors de l'intégrale de Cauchy, il n'existe aucune intégrale $y(x)$ de l'équation telle que $y(x)$ tende vers b, $y'(x)$ vers c, etc., quand x tend vers a sur un certain chemin l. » Le chemin l est d'ailleurs quelconque : il peut admettre le point a comme point asymptote, avoir une longueur infinie, etc. [1].

23. *Théorèmes fondamentaux sur les équations du premier ordre.* — C'est aux équations du *premier ordre* que j'ai tout d'abord appliqué ces principes. Considérons une équation

$$F(y', y, x) = 0, \tag{1}$$

où F est un polynome en y', y, x.

[1] Ce théorème a été critiqué récemment encore par quelques auteurs; dans les exemples que ces auteurs opposent au théorème, le point x ne tend pas vers le point a, mais tantôt s'en approche et tantôt s'en éloigne à distance finie un nombre indéfini de fois.

J'ai démontré [3, 18, 21, 26, 63] sur ces équations deux théorèmes généraux qui s'énoncent ainsi :

Théorème I. — *Une intégrale $y(x)$ de (1) ne peut admettre comme singularités non algébriques qu'un nombre fini de points, qui sont fixes et se déterminent algébriquement sur l'équation même.*

En particulier, tout point transcendant essentiel de $y(x)$ coïncide avec un des points x qui sont pôles de y' quel que soit y.

Théorème II. — Soit $\overline{x_0}$ un point fixe du plan des x distinct des points ξ, et soit $y = \varphi(x, y'_0, y_0, \overline{x_0}) \equiv \psi(x, y, \overline{x_0})$ l'intégrale de (1) définie par les conditions initiales $\overline{x_0}, y_0, y'_0$ [liées par $F(y'_0, y_0, \overline{x_0}) = 0$]; *la fonction $y = \psi(x, \overline{y_0}, \overline{x_0})$ est une fonction algébroïde* (1) *de x et de y_0 pour $x = \overline{x_0}$, $y_0 = b$, quelle que soit la valeur (finie ou infinie) de b.*

Plus généralement, soient $\overline{x_0}$ et $\overline{x}$ deux points x distincts des point ξ et l un chemin qui joint ces deux points sans rencontrer aucun point ξ. L'intégrale étant définie par les conditions initiales $\overline{x_0}, y_0, y'_0$, allons du point $\overline{x_0}$ au point $\overline{x}$ sur le chemin l, et soit $y = \psi(\overline{x}, y_0, \overline{x_0})$ la valeur de l'intégrale au point d'arrivée $\overline{x}$. *L'expression ψ, considérée comme fonction de y_0, coïncide avec une branche de fonction analytique $\chi(y_0)$ algébroïde pour $y_0 = b$ (quelle que soit la valeur b, finie ou infinie)* (2).

Les théorèmes I et II subsistent quand les coefficients du polynome F en y', y sont des fonctions de x non plus *algébriques*, mais *holomorphes dans un certain domaine* D. Il faut alors restreindre les énoncés précédents au domaine D; autrement dit, ne considérer que les points x, x_0 (et les chemins l) intérieurs à D.

---

(1) Autrement dit, à l'intérieur de deux cercles décrits, le premier dans le plan des x du point $\overline{x_0}$ comme centre, le second dans le plan des y_0 du point b comme centre, la fonction $\psi(x, y_0)$ a les propriétés d'une fonction algébrique.

(2) Si, pour $y_0 = b$, l'intégrale $y(x)$ ne présente pas de point critique situé sur l, l'expression $\psi(y_0)$ est méromorphe pour $y_0 = b$. Mais quand, y_0 variant, un point critique (algébrique) de $y(x)$ traverse l, l'expression $\psi(y_0)$ *saute* d'une branche de la fonction $\chi(y_0)$ à une autre branche de la même fonction.

24. Ces deux théorèmes sont l'un et l'autre en défaut dès que l'ordre différentiel de l'équation dépasse l'unité.

C'est ainsi que l'équation

$$(2) \qquad \begin{cases} y'' = y'^2 \left\{ \dfrac{y[2k^2y^2 - (1+k^2)]}{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + \dfrac{1}{\lambda\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \right\} \\ \qquad (\lambda,\ k^2, \text{ constantes numériques}) \end{cases}$$

a comme intégrale la fonction

$$(3) \qquad y = \mathrm{sn}_{k^2}[\lambda \log(Ax+B)] \qquad (A,\ B, \text{ constantes arbitraires}).$$

Chaque intégrale admet un point essentiel (d'indétermination complète) $x = -\frac{B}{A}$, variable avec l'intégrale considérée.

Dès qu'il existe des singularités transcendantes *mobiles*, le théorème II *a fortiori* n'est plus exact. Mais lors même que le théorème I se trouve vrai pour une équation du second ordre, le théorème II peut être en défaut, comme il apparait sur l'exemple

$$(4) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y},$$

dont l'intégrale est

$$y = y_0 e^{\frac{y'_0}{y_0}(x - x_0)}.$$

25. *Applications des théorèmes précédents.* — Indiquons immédiatement quelques conséquences des théorèmes I et II.

Tout d'abord, appliqués aux équations *à points critiques fixes*, ces théorèmes mettent à l'abri de toute critique les travaux bien connus de M. Fuchs et de M. Poincaré.

Ces travaux prêtaient, en effet, à deux objections bien différentes. M. Fuchs s'est borné à exprimer que les intégrales $y(x)$ d'une équation (1) n'ont pas de points critiques algébriques mobiles. Il n'était pas prouvé que les équations (1), répondant à ces conditions, eussent vraiment leurs points critiques fixes (1); étendue, par exemple, à

(1) La même objection s'appliquait aux travaux de Briot et Bouquet sur les équations $F(y, y') = 0$, ainsi qu'à la démonstration directe de l'uniformité de l'intégrale de l'équation $y'^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$, telle qu'on l'enseigne d'ordinaire.

l'équation (2), la même méthode conduirait à la conclusion erronée que l'intégrale de cette équation est uniforme (quel que soit λ). Si les conditions de M. Fuchs se trouvent suffisantes pour les équations du premier ordre, « la vraie raison », dit M. Picard (1), « en est dans le théorème de M. Painlevé », théorème I, en vertu duquel tous les points singuliers non algébriques de (1) sont fixes.

Au contraire, la méthode de M. Poincaré n'introduisait sûrement que des équations à points critiques fixes, mais on pouvait se demander si elle les épuisait toutes. Elle repose, en effet, sur cette remarque que la fixité des points critiques entraîne une correspondance *biuniforme* entre les couples (y, y') et (y_0, y'_0), valeurs de $y(x)$ et de $y'(x)$ pour x et x_0. M. Poincaré admettait implicitement que cette correspondance biuniforme est *birationnelle*. La chose est vraie, en vertu du théorème II, mais appliquée aux équations du deuxième ordre, la même méthode laisserait échapper de nombreuses classes d'équations à points critiques fixes, telles que l'équation (4), et précisément les plus intéressantes (*voir* le § 41).

Dans un autre ordre d'idées, le théorème I m'a permis d'établir, au sujet des intégrales d'une équation algébrique quelconque du premier ordre, un théorème entièrement analogue au célèbre théorème de M. Picard sur les zéros des fonctions entières. *Soit $y(x)$ une intégrale (uniforme ou non) de* (1) *: si, pour une valeur de* A, *l'égalité* $y(x) = A$ *a une infinité de racines, elle en a une infinité, quel que soit* A, *exception étant faite pour un nombre* fini *de valeurs de* A *qui se calculent algébriquement sur l'équation différentielle*. Le seul cas où le théorème n'a pas lieu de s'appliquer est donc celui où la fonction $x(y)$ [inverse de $y(x)$] est une fonction à un nombre limité de branches.

C'est également sur le théorème I que repose la démonstration de cette propriété des équations (1) (*voir* le § 7) : « Tout point transcendant essentiel $x = \xi$ d'une intégrale $y(x)$ de (1) est un point d'*indétermination complète* ».

Voici une autre conséquence du même théorème : moyennant une transformation $x = y + aX$, les intégrales $y(X)$ de l'équation transformée *ne présentent plus de singularités essentielles*. C'est là un résultat

---

(1) *Acta mathematica*, t. XVII, p. 298; 1893.

dont l'importance apparaît, quand on réfléchit que l'étude des intégrales dans le voisinage d'un point transcendant (non essentiel) peut s'effectuer dans des cas très nombreux par les méthodes de M. Poincaré, et, dans tous les cas, se présente comme beaucoup moins compliquée que si le point est essentiel. Mais la transformation n'est pas utilisable dans les problèmes où la variable indépendante est donnée.

On trouvera, dans un autre Chapitre (§ 54), une application très étendue du théorème I au domaine réel.

26. *De l'intégrale considérée comme fonction de la constante. Rôle des points critiques fixes et mobiles.* — Afin de pousser plus loin les conséquences analytiques des théorèmes I et II, j'ai dû analyser la double influence qu'exercent sur l'intégrale les points critiques *mobiles* et les points critiques *fixes*. Dans cet exposé, je me limiterai, pour abréger, aux équations (algébriques en y', y) qui sont aussi algébriques en x ou, du moins, qui ne possèdent qu'un nombre limité de points critiques fixes $x = \xi$.

Définissons une intégrale par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0, et soient $y = \varphi(x, y'_0, y_0, x_0)$, $y_1 = \varphi_1(x, y'_0, y_0, x_0)$ deux branches de cette intégrale qui se permutent entre elles quand x tourne autour des points critiques mobiles *sans tourner* (¹) *autour des points critiques*

(¹) Par définition, le point x, qui décrit un contour fermé C, *ne tourne pas autour d'un point donné* ξ, si la variation totale de l'angle ω que fait avec une demi-droite fixe le vecteur $\overline{\xi x}$, est nulle (quand x parcourt une fois tout le contour C).

Considérons, par exemple, l'équation

$$y' = \frac{y}{x(y+1)}$$

qui s'intègre ainsi :

$$y e^y = \frac{x}{x_0} y_0 e^{y_0}.$$

Chaque intégrale $y(x)$ admet deux points critiques fixes $x = 0$ et $x = \infty$ et un seul point critique mobile $x = -\frac{x_0}{y_0} e^{-(1+y_0)}$; deux branches de $y(x)$ se permutent si x décrit un lacet élémentaire L entourant le point critique mobile; mais si x tourne autour de l'origine n fois dans le sens positif avant de parcourir L et n fois dans le sens négatif après l'avoir parcouru, le point x, quand il a décrit le circuit total, n'a pas tourné autour de l'origine, et un nombre indéfini de branches se permutent ainsi autour du point critique mobile.

fixes ξ. Pour des valeurs numériques $\overline{x}$, $\overline{x}_0$ données à x, les deux expressions

$$\varphi(\overline{x}, y'_0, y_0, \overline{x_0}) \equiv \psi(\overline{x}, y_0, \overline{x_0})$$

et

$$\varphi_1(\overline{x}, y'_0, y_0, \overline{x_0}) \equiv \psi_1(\overline{x}, y_0, \overline{x_0})$$

sont *deux branches de* LA MÊME *fonction analytique* $\chi(y_0)$. Au contraire, si les deux branches $y(x)$, $y_1(x)$ de la même intégrale ne se permutent qu'autour des points critiques fixes, les deux branches $\psi(y_0)$ et $\psi_1(y_0)$ appartiennent, en général, à deux fonctions analytiques *distinctes* de y_0. C'est ce qui apparaît sur l'exemple $y' = \frac{y}{2x}$, dont l'intégrale est $y = y_0\sqrt{\frac{x}{x_0}}$.

Représentons donc par $\psi(x, y_0, x_0)$, $\psi_1(x, y_0, x_0)$, $\psi_2(x, y_0, x_0)$, ... les différentes branches de l'intégrale $y(x)$ qui se permutent avec la première autour des points critiques mobiles. Les expressions $\psi(\overline{x}, y_0, \overline{x}_0)$, $\psi_1(\overline{x}, y_0, \overline{x}_0)$, $\psi_2(\overline{x}, y_0, \overline{x}_0)$, ... coïncident avec des branches d'une certaine fonction analytique $\chi(\overline{x}, y_0, \overline{x}_0)$. Mais j'ai mis en lumière une circonstance bien inattendue : il peut arriver que ces diverses déterminations *n'épuisent pas toutes les branches de la fonction* $\chi(\overline{x}, y_0, \overline{x}_0)$ (prolongée analytiquement dans son domaine d'existence); il peut arriver aussi que certaines branches de cette fonction $\chi(y_0)$ présentent des singularités transcendantes.

Il semble, à première vue, qu'il y ait antinomie entre l'existence de telles singularités et l'énoncé du théorème II : il n'en est rien. C'est au contraire le théorème II qui m'a permis d'élucider ces curieuses complications. Elles dépendent *des valeurs remarquables* Y_0 *de* y_0 *pour lesquelles deux branches au moins de l'intégrale* $y(x) = \psi(x, y_0 \overline{x}_0)$, *permutables autour des points critiques mobiles, cessent de se permuter :* quand y_0 tend vers Y_0, les points mobiles autour desquels les deux branches de $y(x)$ se permutent tendent vers des points ξ ou deviennent indéterminées. Ces valeurs $Y_0 = g(\overline{x}_0)$ peuvent être des points *transcendants* (mais non *essentiels*) de certaines branches de $\chi(\overline{x}, y_0, \overline{x}_0)$. Si (pour $\overline{x}_0$ donné) leur ensemble, dans le plan des y_0, ne comprend pas de *ligne*, *toutes* les branches de la fonction analytique

$\chi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ correspondent aux diverses déterminations (permutables autour des points critiques mobiles) des intégrales définies par les conditions initiales $\bar{x}_0, y_0$. Quand l'ensemble des points Y_0 comprend des lignes, certaines des branches de $\chi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ peuvent définir, en outre des intégrales précédentes, d'autres intégrales $y(x)$ (et même une infinité) *dont aucune détermination ne prend, pour $x = \bar{x}_0$, la valeur y_0.*

27. Éclairons ce qui précède par des exemples.

L'équation

$$y' = \frac{y}{x(y+1)} \tag{5}$$

s'intègre ainsi :

$$y e^y = \frac{x}{x_0} y_0 e^{y_0}. \tag{6}$$

Pour les valeurs $y_0 = 0$ et $y_0 = \infty$ (et pour celles-là seulement), deux branches de l'intégrale générale, permutables autour du point critique mobile, cessent de se permuter; l'unique point critique mobile $x = -\frac{x_0}{y_0} e^{-(1+y_0)}$ tend vers le point critique fixe $x = \infty$ quand y_0 tend vers zéro, et devient indéterminé pour $y_0 = \infty$.

Toutes les branches de la fonction $y = \chi(y_0)$ que définit (6) correspondent aux diverses déterminations de la même intégrale $y(x)$; cette fonction $\chi(y_0)$ admet les points $y_0 = 0$ et $y_0 = \infty$ comme points transcendants d'espèce logarithmique.

Cette équation va nous conduire à un second exemple plus frappant. Soient $2\omega_1$ et $2\omega_2$ les périodes d'une différentielle elliptique de première espèce dont le module est X; remplaçons, dans (6), x par $\frac{\omega_2(X)}{\omega_1(X)}$. L'équation ainsi obtenue jouit d'une propriété bien curieuse : l'intégrale $y(X)$ définie par les conditions initiales $\bar{X}_0, y_0$ *a ses points critiques fixes (les points $0, 1, \infty$) si y_0 appartient à une certaine région D du plan, et possède un point critique mobile autour duquel deux branches se permutent si y_0 est pris dans le reste du plan.*

La fonction $y = \chi(\bar{X}, y_0, \bar{X}_0)$ a une infinité de déterminations permutables dans le plan y_0, et parmi ces déterminations, une ou deux seulement (suivant la région où se trouve y_0) représentent une intégrale $y(x)$ dont une branche prend pour $\overline{X}_0$ la valeur y_0. Les autres déterminations représentent une infinité d'intégrales distinctes.

En remplaçant x dans (5) par $1+\left[\frac{\omega_2(X)}{\omega_1(X)}\right]$, on obtiendrait une équation dont l'intégrale a ses points critiques fixes ou acquiert une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles, suivant que y_0 est pris dans une région du plan ou dans l'autre.

Enfin, si l'on remplace, dans (5), x par la fonction modulaire $\varphi(X)$, on obtient une équation dont l'intégrale $y=\varphi(X, y_0, \overline{X}_0)$ est une fonction de X uniforme ou à deux branches, suivant que y_0 est choisi dans une région ou l'autre du plan. C'est là un exemple qui paraitra, je crois, bien remarquable à quiconque prendra la peine d'y réfléchir : *alors que l'intégrale générale $y(X)$ est une fonction de X à une ou à deux déterminations, cette intégrale est une fonction analytique de la constante y_0 à un nombre infini de branches* (1).

On voit que les complications les plus délicates de la théorie des fonctions se présentent, dès le premier ordre, dans l'étude des équations différentielles. Une prudence minutieuse est nécessaire dans toutes les questions de cette nature, où la vraisemblance est loin d'être un critérium de certitude. C'est la raison qui m'a fait consacrer aux fonctions analytiques et à leurs singularités les travaux que j'ai analysés dans la première Partie.

28. *Équations dont l'intégrale générale n'acquiert que n déterminations autour des points critiques mobiles.* — Un cas particulièrement intéressant [18, 21, 26, 63] est celui où l'intégrale générale n'acquiert qu'un nombre fini n de déterminations autour des points critiques mobiles. J'entends par là qu'une branche *quelconque* d'intégrales $y(x)$ n'est permutable autour des points critiques mobiles qu'avec $(n-1)$ autres branches exactement. Pour certaines intégrales particulières, ce

(1) Cette dernière singularité ne peut d'ailleurs se produire quand l'équation (1) est *algébrique* en x; dans ce cas, si l'intégrale $y(x)$ de (1) est une fonction de x à m branches *au plus*, elle acquiert autour des points critiques mobiles un nombre déterminé n de valeurs $(n \leqq m)$, nombre qui ne s'abaisse que pour certaines intégrales exceptionnelles en nombre *fini*, et elle dépend *algébriquement* de y_0.

nombre peut s'abaisser; mais je suppose expressément que ces intégrales sont *exceptionnelles* [1], autrement dit, que leur ensemble est *dénombrable*.

En m'appuyant sur le théorème II, j'ai montré que l'intégrale générale $y = \psi(x, y_0, \overline{x}_0)$ d'une telle équation est nécessairement une fonction ALGÉBRIQUE de y_0. Inversement, d'ailleurs, si y est une fonction algébrique de y_0, $y(x)$ ne peut acquérir autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de déterminations.

En m'appuyant sur ce résultat fondamental, j'ai fait voir que l'équation considérée se ramène algébriquement à une équation à points critiques fixes. Précisons le mode de réduction en supposant, pour simplifier un peu les énoncés, que l'équation différentielle soit algébrique en x.

L'intégrale de l'équation (1) peut s'écrire

$$(7) \qquad y^n + R_{n-1}(z', z, x)\, y^{n-1} \ldots + R_1(z', z, x)\, y + R_0(z', z, x) = 0,$$

avec

$$(8) \qquad G(z', z, x) = 0,$$

les R étant rationnels en z', z, algébriques en x, et l'équation du premier ordre (8) ayant ses points critiques fixes.

Les théorèmes, aujourd'hui classiques, de M. Poincaré sur les équations à points critiques fixes montrent, d'autre part, que l'équation (8), ou bien s'intègre algébriquement [auquel cas $y(x)$ est algébrique], ou bien peut recevoir une des deux formes suivantes :

$$(9) \qquad \frac{dz}{dx} = a(x)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dz}{dx} = a(x) z^2 + b(x) z + c(x).$$

L'équation (1) est ainsi ramenée explicitement aux quadratures ou aux équations linéaires et ne saurait définir des transcendantes nouvelles.

29. Cette conclusion s'applique en particulier aux équations (1)

---

[1] J'écarte donc les équations de l'espèce que j'ai signalée tout à l'heure, dont l'intégrale, par exemple, est tantôt uniforme, tantôt à deux branches, suivant que y_0 est dans un domaine du plan ou dans un autre.

dont *l'intégrale générale $y(x)$ n'admet dans tout le plan qu'un nombre fini (soit m) de branches* [1]. Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que l'intégrale générale n'acquière que n valeurs ($n \leq m$) autour des points critiques mobiles. Cette condition n'est suffisante que si l'équation (8) s'intègre algébriquement; dans les autres cas, des conditions *transcendantes* sont nécessaires. Si l'équation en z coïncide avec la première équation (9), il faut que l'intégrale abélienne $\int a(x)\,dx$ n'ait que deux périodes; si l'équation en z est une équation de Riccati, il faut que son intégrale $z(x)$ (ou, si l'on veut, l'intégrale de l'équation linéaire correspondante) soit une fonction à p branches, condition qui ne saurait, en général, s'exprimer algébriquement.

On voit ressortir là encore la différence essentielle qui sépare les points critiques fixes et les points critiques mobiles. Admettons, par exemple, que l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation algébrique (1) soit une fonction à deux branches. Si ces deux branches $y_1(x)$, $y_2(x)$ se permutent autour des points critiques *mobiles*, les expressions $z = y_1 + y_2$, $u = y_1 y_2$ vérifient respectivement une équation différentielle *algébrique* dont l'intégrale est uniforme, et l'équation (1) se ramène *algébriquement* à cette équation. Si, au contraire, les points critiques de $y(x)$ sont *fixes*, les mêmes expressions $z = y_1 + y_2$, $u = y_1 y_2$ vérifient encore une équation algébrique en z', z (ou en u', u) à intégrale uniforme, mais où x figure en général d'une façon *transcendante;* la fonction $y(x)$ ne s'exprime plus algébriquement en x, z (ou en x, u).

30. Une question se posait naturellement : *Étant donnée une équation* (1), *comment reconnaître si son intégrale générale n'acquiert qu'un nombre n de valeurs autour des points critiques mobiles?*

C'est cette question qui m'a conduit à une étude approfondie des transformations *simplement rationnelles* des courbes algébriques (*voir* le § 17). Si l'on exprime, en effet, z et z', d'après (7), en

---

[1] L'équation (1) étant supposée *algébrique en x*, il est loisible de poser le problème sous cette forme : « *Déterminer les équations* (1) *dont une intégrale $y(x)$ quelconque est une fonction à m branches au plus.* » *Voir* la Note de la page 48.

y', y, x, les égalités

$$z = r(y', y, x), \qquad z' = r_1(y', y, x)$$

sont rationnelles en y', y (et algébriques en x); elles définissent (pour x donné) une correspondance rationnelle entre les deux courbes algébriques (1) et (8). En m'appuyant sur les propriétés de ces correspondances, j'ai établi ce théorème [1] :

On sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, si l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation différentielle (algébrique) du premier ordre n'acquiert qu'un nombre DONNÉ *n de valeurs autour des points critiques mobiles.*

Quand il en est ainsi, un nombre *fini* d'opérations algébriques permet d'intégrer l'équation ou de la ramener à une des équations (9).

Mais est-il possible de traiter le même problème *sans se donner l'entier n?* Les tentatives faites sur les équations $F(y', y) = 0$ qui ne renferment pas x explicitement ne donnaient guère lieu de l'espérer. Comme ces équations ne possèdent pas de points critiques fixes, la question est de décider si leur intégrale $y(x)$ est une fonction à un nombre fini de branches; elle se traite bien aisément dans l'hypothèse où $y(x)$ est algébrique; dans l'hypothèse où $y(x)$ est transcendant, elle revient à reconnaître si une certaine différentielle abélienne n'a qu'une ou deux périodes. Ce problème (en dépit des recherches profondes d'Abel, de Tchebycheff, de Zolotaref, d'Halphen, et de tant d'autres) n'a été résolu jusqu'ici que dans des cas très particuliers, qui exigent des recherches de haute Arithmétique. Il était bien vraisemblable que les équations où x figure présenteraient des complications plus grandes encore. J'ai pu cependant [23, 24, 63] arriver au résultat suivant :

---

(1) La méthode permet également [26, 63, 59] de former *explicitement* toutes les équations (1) de degré *donné* en y', y, dont l'intégrale acquiert un nombre *donné* n de valeurs autour des points critiques mobiles. Une circonstance remarquable, c'est que le nombre des *fonctions* arbitraires de x que renferment les équations cherchées est indépendant de n, tandis que le nombre des *constantes* arbitraires croît avec n. J'ai traité [59] le problème dans tous ses détails pour les équations du premier degré en y'; M. A. Cahen l'a traité ensuite pour les équations du deuxième degré (Paris, Thèse; 1899).

Étant donnée une équation différentielle algébrique du premier ordre, on sait, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, reconnaître si son intégrale générale est une fonction TRANSCENDANTE *qui n'acquiert qu'un nombre limité* (NON DONNÉ) *de valeurs autour des points critiques mobiles, ou bien ramener l'équation à une quadrature.*

Dans ce dernier cas, la quadrature qui définit l'intégrale est une quadrature de différentielle totale (algébrique), soit

$$\int P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \text{const.} \tag{10}$$

Pour que l'équation soit vraiment de l'espèce considérée, il faut et il suffit que (pour x_0 quelconque) l'intégrale $y(t)$ de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{Q(x_0, y)}$$

n'ait qu'un nombre limité de branches, en sorte que la question posée serait complètement résolue si elle l'était dans ce cas particulier où l'équation ne renferme pas x explicitement. Ce dernier cas, au lieu d'être plus simple que le cas général, est en réalité un cas singulier qui met en défaut les méthodes du *continu* et exige l'emploi des méthodes propres au *discontinu*.

Je me suis proposé également de *reconnaître si l'intégrale générale d'une équation différentielle algébrique du premier ordre est une transcendante à un nombre fini (non donné) de branches.* La réponse est la suivante : « On sait résoudre la question algébriquement ou ramener l'équation soit à une quadrature (10), soit à une équation de Riccati ». *La question serait résolue dans tous les cas si elle l'était pour les équations où x ne figure pas et pour les équations de Riccati.*

31. *Équations intégrables algébriquement.* — Les deux derniers énoncés écartent l'hypothèse où $y(x)$ serait algébrique. Néanmoins les méthodes que j'emploie entraînent d'importantes conséquences sur les équations (1) *intégrables algébriquement.*

Tout d'abord, elles suffisent à reconnaître si l'intégrale est une fonction algébrique à un nombre donné n de branches.

S'il s'agit de traiter le même problème *sans aucune donnée*, voici brièvement les résultats que j'ai obtenus [17, 20, 26, 63] : La théorie des transformations rationnelles des courbes permet soit de reconnaître que l'équation est intégrable algébriquement, soit de l'intégrer par une quadrature (10), soit enfin d'affirmer qu'une intégrale quelconque $y(x)$, si elle est algébrique, se laisse définir par l'intersection *complète* de la surface $F(y', y, x) = 0$ avec une surface du faisceau

$$\rho(y', y, x) = C,$$

où ρ est rationnel en y', y, x.

Pour élucider ce dernier cas, j'ai établi une formule très simple qui donne le degré des courbes intégrales en fonction du degré de F, du degré de l'intégrale *singulière* et du nombre de valeurs *remarquables* de la constante (valeurs de C pour lesquelles l'intersection de $F = 0$ et de $\rho = C$ comprend une courbe multiple). Cette formule généralise une formule bien connue de M. Darboux relative aux équations du premier degré. Jointe aux relations que l'équation différentielle entraine entre le degré, la classe, le genre, les intersections, les singularités des courbes intégrales, elle limite dans des cas très étendus, *mais non dans tous les cas*, le degré de l'intégrale supposée algébrique. Ces travaux sont en contact avec des travaux de M. H. Poincaré et de M. Autonne. Je crois avoir donné les premiers exemples de limitation du degré de l'intégrale par des considérations de Géométrie énumérative : comme type de tels exemples, je citerai les équations du premier degré dont tous les nœuds sont dicritiques (1) et en nombre inférieur à 9.

La méthode permet aussi [13, 26], dans certains cas, de trouver les intégrales algébriques particulières, notamment *toutes les intégrales rationnelles d'une équation du premier degré*.

Théorie analytique des équations différentielles d'ordre supérieur.

32. *Singularités des systèmes différentiels algébriques.* — Les résultats que j'ai obtenus [36, 37, 63] sur les singularités des équations

(1) Un nœud est dicritique quand il ne passe pas par ce nœud une infinité de courbes intégrales tangentes entre elles.

différentielles embrassent tous les systèmes différentiels algébriques (à une ou plusieurs variables indépendantes) dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre *fini* de constantes. Ils s'appliquent même aux systèmes où les variables indépendantes figurent non pas algébriquement, mais sous forme analytique. Pour en donner un aperçu, je me limiterai ici aux systèmes

$$\text{(S)} \qquad \frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}$$

où X, Y, Z sont des polynomes en x, y, z (premiers entre eux); x désigne la variable indépendante, y et z les fonctions. Je supposerai qu'on a effectué au préalable sur y et z la transformation homographique (à deux variables) la plus générale.

Poursuivons l'étude d'une intégrale $y(x)$, $z(x)$ le long d'un certain chemin L du plan des x, et soit a le premier point singulier transcendant qu'on rencontre. Ce point peut être, ou point *transcendant ordinaire* de $y(x)$ et de $z(x)$, ou point *essentiel* (*voir* le § 7) de l'une au moins des fonctions $y(x)$, $z(x)$. Dans le premier cas, $y(x)$ et $z(x)$ prennent des valeurs déterminées (finies ou non) pour $x = a$; quand ces valeurs sont finies, X, Y et Z s'annulent pour $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Si difficile et si incomplète que soit encore l'étude d'une intégrale $y(x)$, $z(x)$ dans le voisinage d'un point transcendant ordinaire, les complications semblent bien plus profondes encore quand le point singulier est essentiel. Comment s'attaquer, dans le domaine d'un point $x = a$, à une intégrale $y(x)$, $z(x)$ qui devient *indéterminée* en ce point? Comment même décider si de telles intégrales existent ou non? Les méthodes classiques, dérivées de la doctrine de Cauchy, n'indiquaient aucune voie pour aborder ces problèmes. D'autre part, les exemples les plus simples d'équations différentielles du second ordre présentaient des points essentiels mobiles. Il semblait donc à la fois bien difficile et bien important de découvrir des classes étendues d'équations différentielles d'ordre supérieur dépourvues de telles singularités.

En approfondissant cette question, je suis arrivé à un résultat inattendu [1] : c'est qu'*un système différentiel* (S) (et la chose est vraie

---

[1] *Voir* l'Introduction, p. 6.

pour un système différentiel algébrique d'ordre quelconque) *n'admet pas en général de singularités essentielles mobiles*. Pour que de telles singularités existent, il faut que certaines conditions exceptionnelles soient remplies, sur lesquelles j'insisterai un instant.

33. J'emploierai, pour plus de clarté, le langage géométrique : je considérerai x, y, z comme les coordonnées complexes d'un point de l'espace; une intégrale $y(x)$, $z(x)$ de (S) représentera une courbe gauche qui sera dite *courbe intégrale*. Cette terminologie adoptée, trois cas sont à distinguer dans l'étude du système S :

Premier cas (*cas général*). — Les trois surfaces $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ se coupent en un nombre fini de points.

Les théorèmes I et II énoncés pour les équations du premier ordre (*voir* le § 23) et toutes leurs conséquences s'appliquent sans modification au système (S) : en dehors d'un nombre fini de points fixes $x = \xi$ (qui se déterminent algébriquement sur le système), les intégrales $y(x)$, $z(x)$ de (S) ne présentent que des points singuliers algébriques. Si un point $x = \xi$ est un point essentiel d'une intégrale, ξ est un zéro de X, quels que soient y et z.

La valeur (en un point x quelconque) de l'intégrale

$$y = \varphi(x, y_0, z_0, \overline{x}_0), \qquad z = \psi(x, y_0, z_0, \overline{x}_0),$$

définie par les conditions initiales $\overline{x}_0$, y_0, z_0, est une fonction algébroïde de y_0, z_0 pour $y_0 = b$, $z_0 = c$ (quels que soient b et c). L'emploi de ce dernier théorème exige les mêmes précautions que pour les équations du premier ordre (§ 26).

Deuxième cas. — Les surfaces $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ont une ligne commune, mais il n'existe pas de famille de courbes intégrales planes et situées dans une famille de plans $x = \text{const.}$

Les intégrales $y(x)$, $z(x)$ admettent alors (en général) des points singuliers transcendants mobiles, mais ces points ne sauraient être *essentiels*. Une proposition analogue s'applique aux branches de fonctions $y(x)$, $z(x)$ regardées comme fonctions des constantes y_0, z_0.

Troisième cas. — Il existe une famille de courbes intégrales situées dans une famille de plans $x = x_0$ (auquel cas les trois surfaces $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ont toujours une courbe commune).

Cette condition est *nécessaire* pour que les intégrales présentent les singularités essentielles mobiles, mais elle n'est pas suffisante. Il faut encore que cette condition soit remplie *intrinsèquement* : j'entends par là qu'après une transformation quelconque

$$y = g(x, y, z), \qquad z = h(x, y z),$$

où g et h sont algébriques en y, z, analytiques en x, le nouveau système différentiel doit satisfaire à la même condition.

Lors même que la condition est remplie *intrinsèquement*, il peut ne pas exister de singularités essentielles mobiles.

34. *Applications des résultats précédents.* — Ces théorèmes entraînent d'importantes conséquences dans la théorie générale des équations différentielles ; je citerai notamment celle-ci :

Moyennant un changement de variables $t = x + ay + bz$, les intégrales $y(t)$, $z(t)$ du nouveau système différentiel n'ont plus de singularités essentielles mobiles. Autrement dit, les singularités essentielles disparaissent quand on rapporte les courbes intégrales à des axes quelconques. Mais on ne peut employer ce changement de variables dans les questions où la variable indépendante est donnée.

J'ai déjà signalé, d'autre part (§ 7), une propriété des équations du second ordre qui est une conséquence des généralités précédentes : « L'intégrale $y(x)$ d'une équation différentielle algébrique du deuxième ordre ne peut présenter de points essentiels d'indétermination *incomplète*, en dehors d'un nombre fini de points fixes dont les affixes se calculent algébriquement sur l'équation même ». Quand l'équation est du troisième ordre, son intégrale peut admettre des points mobiles d'indétermination *incomplète*.

On trouvera enfin dans un autre Chapitre (§ 56) une application des mêmes théorèmes au domaine réel. J'en indiquerai dès maintenant une conséquence très remarquable : Étant donné un système différentiel algébrique d'ordre n, soit (S), on sait lui substituer algébriquement un système réel d'ordre $(2n+1)$, soit (S′), dont les coefficients différentiels sont rationnels, *et dont les intégrales ne présentent pas (dans le champ réel) de singularités essentielles mobiles : l'étude des singularités mobiles (transcendantes ou essentielles) de* (S) *est ramenée* *algébriquement à l'étude des intégrales réelles du système* (S′) *définies par des conditions initiales qui donnent aux coefficients différentiels la forme* $\frac{0}{0}$.

Mais mon principal objet en poursuivant ces recherches était l'étude des équations différentielles *dont l'intégrale est uniforme ou n'a qu'un nombre fini de branches.*

J'ai donc commencé par compléter les généralités précédentes relatives aux singularités essentielles en ajoutant à la condition énoncée tout à l'heure dans le troisième cas une condition nouvelle, *condition nécessaire pour qu'il existe des singularités essentielles mobiles dans le voisinage desquelles l'intégrale* $y(x)$, $z(x)$ *soit uniforme ou à n branches.*

Nous savons déjà qu'il doit exister une famille de courbes intégrales situées dans des plans $x =$ const. Soit $Q(x, y, z) = 0$ la surface qu'elles engendrent (Q est en facteur dans X). La nouvelle condition est la suivante : après la transformation

$$(\mathrm{T}) \qquad \eta = Q(x, y, z), \qquad \zeta = \frac{1}{z},$$

le nouveau système différentiel en x, η, ζ doit admettre comme courbes intégrales les droites $x =$ const., $\zeta = 0$.

Il faut que ces deux conditions soient remplies (et remplies intrinsèquement) pour que l'intégrale $y(x)$, $z(x)$ *puisse présenter, dans un domaine* D *où elle n'acquiert qu'un nombre fini de branches, des singularités mobiles non algébriques.* Toutefois, si, après la transformation (T), le système est de la forme

$$\frac{d\eta}{dx} = G(\eta, x), \qquad \frac{d\zeta}{dx} = K(\zeta, \eta, x),$$

il peut exister des points essentiels (mobiles) proprement dits, bien que la première condition seule soit remplie : mais c'est là un cas de réduction, où le système équivaut à deux équations successives du deuxième ordre.

Au lieu d'un système (S), considérons une équation différentielle algébrique du deuxième ordre, soit

$$(\mathrm{E}) \qquad F(y'', y', y, x) = 0,$$

dans laquelle j'admets qu'on ait effectué sur y la transformation homographique la plus générale. *Pour que, dans un domaine où elle n'admet que n déterminations, l'intégrale $y(x)$ soit affectée de singularités transcendantes mobiles, il faut : 1° que la fonction algébrique $y''=\varphi(y', y, x)$, considérée comme fonction de y, ait au moins un point singulier $y=g(x)$ indépendant de y'; 2° que, pour $y'=\infty$, une au moins des branches de $\frac{y''}{y'^2}$ tende vers une valeur finie ou nulle.* Il faut, de plus, que ces deux conditions soient remplies *intrinsèquement* : j'entends qu'après une transformation quelconque $\eta=g(y', y, x)$, où g est algébrique en y', y et analytique en x, l'équation en η doit satisfaire aux mêmes conditions.

Je conviens de dire que les équations (E) qui répondent à cette double condition forment la classe *singulière* des équations du second ordre; les autres équations forment la classe *générale*. Les systèmes différentiels algébriques d'ordre quelconque comportent une division analogue.

Équations dont l'intégrale générale est une fonction uniforme ou à n branches.

35. Comme je l'ai indiqué dans l'Introduction, la recherche des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles algébriques est un problème qui se trouve posé en fait depuis les travaux d'Abel et de Jacobi sur l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2).$$

C'est l'étude de cette équation qui a engendré la théorie des fonctions elliptiques et, par extension, celle des fonctions uniformes. Cette dernière théorie une fois fondée, il s'agissait moins de construire artificiellement des transcendantes nouvelles, que de découvrir, parmi toutes les transcendantes uniformes, celles qui peuvent servir à intégrer les équations différentielles. La fonction *exponentielle*, les fonctions *elliptiques* étaient les premiers types de telles fonctions : on ne tarda pas à en découvrir d'autres, à savoir les fonctions *abéliennes*, puis les intégrales uniformes des équations différentielles *linéaires*; enfin, les fonctions *fuchsiennes* ou *automorphes*, *hyperfuchsiennes*, etc.

Mais l'étude de ces nouvelles transcendantes, si importante qu'elle fût, ne permettait en aucune manière d'épuiser le problème qui se posait dès lors naturellement :

Déterminer toutes les équations différentielles algébriques du premier ordre, puis du second ordre, puis du troisième ordre, etc., dont l'intégrale générale est uniforme.

Lorsqu'on approfondit ce problème, la différence de nature entre les points critiques fixes et les points critiques mobiles apparaît dès le premier ordre (§§ 26 et 29). Pour exprimer que l'intégrale d'une équation différentielle est uniforme, il faut exprimer d'abord qu'elle n'a pas de points critiques *mobiles;* ensuite, qu'elle n'a pas de points critiques *fixes*. La classe des *équations à points critiques fixes* se présente ici d'elle-même : on sait d'ailleurs l'importance intrinsèque de ces équations, importance qui résulte de leur parenté avec les équations linéaires.

Enfin, en même temps que les équations à intégrale uniforme, il est naturel de considérer les équations dont l'intégrale générale est une fonction *à un nombre fini de branches*. L'étude de ces équations fait intervenir, comme équations intermédiaires bien remarquables par elles-mêmes, les *équations dont l'intégrale générale n'acquiert que n valeurs autour des points critiques mobiles* (*voir* le § 28).

36. Les équations du premier ordre qui rentrent dans une de ces catégories se ramènent, nous l'avons vu, aux équations linéaires ou aux quadratures. Pour définir des transcendantes uniformes vraiment nouvelles, il faut donc que l'équation soit au moins du second ordre.

Quand une équation

$$F(y'', y', y, x) = 0 \tag{E}$$

a ses points critiques fixes, l'intégrale $y = \varphi(x, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x_0})$, définie par les conditions initiales y''_0, y'_0, y_0, $\overline{x_0}$, est une fonction *uniforme* des trois quantités y''_0, y'_0, y_0 liées par la relation algébrique

$$F(y''_0, y'_0, y_0, \overline{x_0}) = 0. \tag{E_0}$$

Mais il apparaît, sur les exemples les plus simples (§ 24), que y peut être une fonction soit *rationnelle*, soit *transcendante* de y''_0, y'_0, y_0 ; dans ce dernier cas, $y(x)$ peut ou non présenter dans le plan des x des *singularités transcendantes mobiles*.

Quand y dépend rationnellement de y''_0, y'_0, y_0, les relations qui (pour x et x_0 donnés) existent entre (y'', y', y) d'une part, et (y''_0, y'_0, y_0) d'autre part, définissent une correspondance *birationnelle* entre les surfaces (E) et (E_0). La même correspondance est *biuniforme* si y est une fonction transcendante de y''_0, y'_0, y_0. C'est pourquoi j'ai dû approfondir la théorie des *transformations biuniformes des surfaces algébriques* (*voir* § 21).

De même, quand l'intégrale générale d'une équation (E) n'acquiert que n déterminations autour des points critiques mobiles, son intégrale se laisse mettre [34, 63] sous la forme

$$(1) \quad y^n + R_{n-1}(x, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x_0})y^{n-1} + \ldots + R_0(x, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x_0}) = 0,$$

où les R sont des fonctions de x à points critiques fixes et des fonctions uniformes de y''_0, y'_0, y_0, qui peuvent être *rationnelles* ou *transcendantes ;* dans ce dernier cas, $y(x)$ peut présenter des singularités essentielles mobiles.

37. *Équations dont l'intégrale est une fonction algébrique des constantes.* — Si, dans (1), les R_i sont rationnels en y''_0, y'_0, y_0, j'ai montré [15, 21, 23, 35, 63] qu'il est loisible de donner à l'intégrale la forme suivante :

$$(2) \qquad y^n + \rho_{n-1}(u'', u', u, x)y^{n-1} + \ldots + \rho_0(u'', u', u, x) = 0,$$

avec

$$(3) \qquad G(u'', u', u, x) = 0 ;$$

l'équation (3) a ses points critiques fixes, et les ρ sont rationnels en u'', u', u et algébriques en x [1]. De plus (pour x donné) u, u' et u'' s'expriment rationnellement en y, y', y'' et ces expressions définissent une correspondance rationnelle entre les surfaces (E) et (3).

---

[1] Quand l'intégrale est une fonction transcendante des constantes, elle n'admet pas, en général, une telle représentation ; chaque coefficient $R(x, y''_0, y'_0, y_0, \overline{x_0})$ de l'équation (1) vérifie une équation différentielle $\frac{d^2R}{dx^2} = P\left(\frac{dR}{dx}, R, x\right)$ transcendante en x, R, $\frac{dR}{dx}$.

Inversement, si l'intégrale $y(x)$ d'une équation (E) est une fonction algébrique des constantes, elle peut recevoir la forme (2), (3), où n est un certain entier, et elle n'acquiert autour des points critiques mobiles que n déterminations.

Les transformations rationnelles des surfaces jouent ici le même rôle que les transformations rationnelles des courbes pour les équations du premier ordre (*voir* § 30).

C'est la théorie de ces transformations (*voir* les §§ 18 et 19) qui m'a permis d'élucider à fond la nature de l'intégrale $y(x)$ d'une équation (E) quand cette intégrale *renferme algébriquement les deux constantes d'intégration* (1). J'ai montré que *quatre cas* sont alors possibles :

1° Ou bien $y(x)$ est algébrique ;

2° Ou bien $y(x)$ s'exprime algébriquement à l'aide de x et de deux fonctions hyperelliptiques $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$, où les deux arguments sont deux intégrales abéliennes en x ;

3° Ou bien $y(x)$ s'exprime algébriquement en x, u, v, les fonctions $u(x)$, $v(x)$ vérifiant respectivement une des équations suivantes :

$$\frac{du}{dx} = -u^2 + a(v, x) \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} = b(x)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

$$\frac{dv}{dx} = -v^2 + c(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dx} = c(x)\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2v^2)}$$

(b, c fonctions algébriques de x ; a fonction algébrique de v, x ; k et $\varkappa$ constantes numériques) ;

4° Ou bien $y(x)$ s'exprime algébriquement en (x, u, u'), u désignant la dérivée logarithmique $\frac{z'}{z}$ de l'intégrale z d'une équation linéaire homogène du troisième ordre

$$z''' + a(x)z' + b(x)z = 0 \qquad (a,\ b \text{ algébriques en } x).$$

L'équation (E), *dans ces quatre cas, se ramène aux équations linéaires ou aux quadratures, et son intégrale est une combinaison explicite de transcendantes connues.*

---

(1) M. Picard avait déjà résolu la question quand l'intégrale renferme rationnellement y''_0, y'_0, y_0, et quand, en outre, la surface $F(y'', y', y, x) = 0$ est de genre $p > 1$, ou possède deux différentielles totales de première espèce.

La méthode que j'ai employée permet aussi de reconnaître dans des cas extrêmement étendus si une équation (E) donnée est de l'espèce étudiée. *Dans tous les cas,* elle suffit à résoudre, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, le même problème, *quand on se donne le nombre maximum n de branches de l'intégrale* $y(x)$ *qui se permutent autour des points critiques fixes :* elle apprend notamment à reconnaître, moyennant un nombre fini d'opérations, si l'intégrale générale de l'équation (E) est une fonction algébrique de x à n branches.

J'insisterai sur le problème particulièrement intéressant : *Étant donnée une équation* (E), *reconnaître si son intégrale* $y(x)$ *est une fonction rationnelle des constantes* y''_0, y'_0, y_0.

Ce problème, qui est résolu d'après ce qui précède, présente des complications qu'on ne rencontrait pas dans le cas du premier ordre. On le conçoit aussitôt en se limitant aux équations (E) du premier degré en y'' : toute correspondance birationnelle entre deux quantités indépendantes y et y_0 est nécessairement homographique; au contraire, une correspondance birationnelle entre deux couples de variables (y, y') et (y_0, y'_0) peut être une transformation de Cremona de degré quelconque. C'est dans la limitation du degré de la correspondance entre (y, y') et (y''_0, y'_0) que réside toute la difficulté de la question.

Les résultats énoncés dans ce paragraphe s'étendent à *tous les systèmes différentiels dont l'intégrale générale dépend d'un nombre fini de constantes et les renferme algébriquement.* De tels systèmes sont nécessairement algébriques par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées, mais les variables indépendantes y peuvent figurer analytiquement.

38. Jusqu'ici, la distinction que j'ai établie entre les équations (E) de la classe *générale* et de la classe *singulière* n'a joué aucun rôle.

Quand on la fait intervenir, la conclusion à laquelle on arrive [37, 63] est bien simple :

Si l'intégrale d'une équation (E) *n'acquiert que n valeurs autour des points critiques mobiles, cette intégrale est une fonction algébrique ou transcendante des constantes* y'_0, y_0 *suivant que l'équation* (E) *est de la classe générale ou de la classe singulière.*

D'après cela, quand une équation donnée (E) appartient à la classe *générale*, un nombre *fini* d'opérations algébriques permet de reconnaître si son intégrale n'acquiert que n déterminations autour des points critiques mobiles (n étant donné).

Ceci suppose toutefois que la terminologie adoptée à propos du premier ordre soit strictement appliquée ici : les équations que nous considérons sont celles dont une intégrale quelconque acquiert *exactement* n déterminations autour des points critiques mobiles ; ce nombre ne s'abaisse que pour des intégrales particulières *exceptionnelles*, je veux dire : formant une ensemble dénombrable.

Mais il est loisible, pour les équations du deuxième ordre, d'entendre le mot *exceptionnelles* dans un sens plus large, et de dire que les intégrales en question sont exceptionnelles quand, *pour une valeur numérique arbitraire donnée à une quelconque des deux constantes*, elles forment un ensemble dénombrable. Admettons cette définition ; l'intégrale d'une équation (E), si elle n'acquiert que n branches autour des points critiques mobiles, se laisse toujours mettre sous la forme (1) ; lorsque l'équation est de la classe *générale*, les R_i ne peuvent avoir d'autres singularités mobiles que des pôles ; mais ce peuvent être des fonctions uniformes *transcendantes* de y''_0, y'_0, y_0, qui présentent comme singularités essentielles les valeurs des constantes pour lesquelles deux branches d'intégrale, permutables autour des points critiques mobiles, cessent de se permuter. Cette remarque ne concerne évidemment pas les équations à points critiques fixes.

C'est le dernier sens, le plus large [1], que j'adopterai dans ce qui suit.

39. *Équations dont l'intégrale est une fonction à n branches qui renferme les constantes sous forme transcendante.* — Il s'agit maintenant d'élucider le cas où, l'intégrale étant mise sous la forme (1), les R_i sont des fonctions *uniformes transcendantes* de y''_0, y'_0, y_0.

---

[1] Si l'on posait la question ainsi : Étudier les équations (E) dont les intégrales acquièrent *au plus* n valeurs autour des points critiques mobiles, on introduirait ces équations (analogues à celles que j'ai signalées, p. 48, dans le cas du premier ordre) dont une intégrale acquiert tantôt n, tantôt n' valeurs, suivant les régions où se trouvent les constantes y_0, y'_0. Pour ces équations, l'intégrale peut être une fonction de y'_0, y_0 à un nombre infini de branches.

Quelles que soient les constantes qu'on substitue à y'_0, y_0, l'intégrale $y(x)$ ne deviendra jamais une fonction algébrique des deux constantes. Mais il peut arriver que, moyennant un choix convenable des constantes, $y(x)$ *renferme algébriquement une de ces constantes*. Je conviens de dire, dans ce cas, que l'intégrale est une fonction *semi-transcendante* des constantes. Si, au contraire, l'intégrale est une fonction transcendante de l'une et de l'autre constante, de quelque manière qu'on les choisisse, l'intégrale est dite *fonction essentiellement transcendante des deux constantes*.

Ceci posé, j'ai démontré [63] qu'une équation (E), dont l'intégrale $y(x)$ est une fonction semi-transcendante des constantes, équivaut à une combinaison de deux équations du premier ordre

$$(4) \qquad \mathrm{H}(y', y, t, x) = 0, \qquad \mathrm{K}(t', t, x) = 0,$$

H et K étant algébriques. Pour que l'intégrale de l'équation (E) n'acquière autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de valeurs, il faut qu'il en soit de même pour les intégrales de chaque équation (4). Il suit de là que y s'exprime algébriquement en x, u, v, les fonctions $u(x)$, $v(x)$ vérifiant respectivement une des équations

$$\frac{du}{dx} = -u^2 + a(x, v) \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{dx} = a(x, v)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

$$\frac{dv}{dx} = -v^2 + b(x) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dv}{dx} = b(x)\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2v^2)}$$

[a est algébrique en x, v; b en x; k et $\varkappa$ sont des constantes numériques, à moins que $b \equiv 0$, et que $k \equiv v \equiv v_0$].

Toute équation (E) *dont l'intégrale générale n'acquiert autour des points critiques mobiles que n déterminations et renferme les constantes sous forme semi-transcendante, se ramène donc aux équations linéaires et aux quadratures;* son intégrale est une combinaison explicite de transcendantes connues. *Seules les équations dont l'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes peuvent engendrer des transcendantes nouvelles.*

Remarquons que, si l'équation (E) a ses points critiques fixes, la correspondance biuniforme qui existe (pour x et x_0 donnés) entre les surfaces (E) et (E_0) est *semi-transcendante* ou *essentiellement* *biuniforme*, suivant que l'intégrale est elle-même une fonction semi-transcendante ou essentiellement transcendante des deux constantes.

On conçoit dès lors [39, 40, 63] la relation étroite qui existe entre la recherche des équations du second ordre qu'intègrent des transcendantes uniformes *nouvelles* et l'étude des transformations *essentiellement biuniformes* des surfaces algébriques.

Les théorèmes du § 21 montrent [55] que *si le genre de la surface* $F = 0$, *pour x donné, est plus grand que* 1, *l'intégrale ne peut avoir ses points critiques fixes sans être une fonction algébrique ou semi-transcendante des constantes.*

Pour définir à la fois des fonctions uniformes nouvelles et des correspondances essentiellement biuniformes entre surfaces, le premier problème qui se posait était de déterminer, parmi les équations (E) résolues en y'', celles qui ont leurs points critiques fixes.

Équations à points critiques fixes du second ordre et du premier degré.

40. Parmi les équations

$$(e) \qquad y'' = R(y', y, x),$$

où R est rationnel en y', y, x, était-il possible de découvrir toutes les équations à points critiques fixes? Pour les raisons que j'ai données dans l'Introduction (p. 4), il n'y avait pas lieu de l'espérer.

Le géomètre qui avait publié sur ce sujet les travaux les plus importants, M. Picard, s'était attaché surtout aux équations (e) *où x ne figure pas*. Sa méthode consistait à exprimer que l'intégrale ne présente pas de points critiques algébriques, non plus que des points transcendants *d'une certaine espèce*. Quand ces conditions étaient remplies, M. Picard convenait de dire que l'intégrale est à *apparence uniforme*. Mais l'intégrale était-elle vraiment uniforme? Des exemples très simples montraient qu'il n'en était rien. D'autre part, on ne concevait aucun moyen de compléter ces conditions(1). Comment exprimer,

(1) J'ajoute que ces conditions n'étaient établies que moyennant certaines hypothèses simplificatrices faites sur l'équation (e). Il n'était donc pas certain qu'elles fussent *nécessaires*. Enfin, elles ne limitaient point le degré de R en y, et n'indiquaient d'aucune manière qu'une telle limitation fût possible.

en effet, qu'il n'existe pas de *singularités essentielles mobiles*, ou, s'il en existe, qu'elles ne sont pas *critiques?* Les seuls cas où l'on pût affirmer l'uniformité de l'intégrale étaient ceux où les conditions trouvées entraînent (comme dans le problème de M^me Kowaleski) l'intégration de l'équation différentielle, et où cette intégration même met en évidence l'uniformité de l'intégrale. C'est pourquoi M. Picard, dans les derniers Mémoires qu'il ait consacrés à la question, arrivait à cette conclusion : « Les conditions pour que l'intégrale soit uniforme sont transcendantes : il est impossible, en général, de les former (¹). »

Je suis parvenu cependant [38, 76 à 81, 86, 87, 96, 99] à résoudre complètement le problème, et même un problème plus général : *j'ai déterminé toutes les équations à points critiques fixes de la forme*

$$(f) \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = \rho\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right),$$

où ρ *est rationnel en* $\frac{dY}{dX}$, *algébrique en* Y, *analytique en* X.

Il m'a fallu pour cela constituer une double méthode qui répondît à ce double objet : 1° former des conditions *nécessaires* (nouvelles) pour qu'une équation (f) ait ses points critiques fixes; 2° décider si ces conditions sont ou non *suffisantes*.

Les résultats sont tellement simples et précis que je les donnerai explicitement.

Considérons le Tableau suivant (où α, β, γ, δ, ε désignent des constantes numériques) :

$$\text{(I)} \qquad y'' = -3yy' - y^3 + a(x) \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{z'}{z}, \qquad z''' = az.$$

$$\text{(II)} \qquad y'' = -2yy' + a(x).$$

$$\text{(III)} \qquad y'' = \alpha y^3 + \beta y^2 + (\gamma x + \delta)y + (\varepsilon x + \varkappa) \qquad (\gamma\beta = 3\alpha\varepsilon).$$

$$\text{(IV)} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + \left[a(x)y + \frac{b(x)}{y}\right]y' + a'(x)y^2 - b'(x).$$

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y'' = \frac{y'^2}{y} + a'(x)\frac{y'}{y} + \delta y^3 + [a(x)\delta + \varepsilon]y^2 - a''(x) \\ \qquad\qquad (\delta = 0 \text{ ou } 1, \ \varepsilon = 0 \text{ ou } 1). \end{array} \right.$$

(¹) *Comptes rendus*, t. CXIV, p. 1310; juin 1892.

$$\text{(VI)} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^{\lambda x}(\alpha y^2 + \beta) + e^{2\lambda x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right).$$

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} y'' = y'^2\left[\dfrac{\left(6y^2 - \dfrac{g_2}{2}\right)}{P} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{P}}\right] + a(x)y' + b(x)\sqrt{P} \\ \left[P = 4y^3 - g^2 y - g_3, \quad \lambda = 0 \text{ ou } \dfrac{i\pi}{\omega}\left(\begin{array}{c}2\omega \text{ période quelconque} \\ \text{de } p(u, g_2, g_3)\end{array}\right)\right]. \end{cases}$$

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} y'' = y'^2 \dfrac{[3y^2 - 2(1+x)y + x]}{2P} \\ \qquad + y'\left(\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)} = a(x)\sqrt{P} \\ \qquad [P = y(y-1)(y-x)]. \end{cases}$$

Les équations de ce Tableau ont leurs points critiques fixes; *toutes les équations à points critiques fixes de la forme* (f) *s'obtiennent soit en effectuant sur ces huit équations la transformation la plus générale*

$$Y = \varphi(y, x), \qquad X = l(x),$$

dans laquelle l *et* φ *sont analytiques en* x *et* φ *rationnel en* y [*ou en* y *et* $\sqrt{P}$ *pour les types* (VII) *et* (VIII)]; *soit en effectuant sur l'équation* (III) (*où* $\alpha = \gamma = \delta = 0$, $\beta = 6$) *la transformation*

$$Y = \varphi(z, x), \qquad z = \frac{y' - y'_1}{y - y_1}, \qquad X = l(x);$$

$y_1(x)$ *est une intégrale particulière quelconque de* (III), φ *est rationnel en* z *et analytique, ainsi que* l, *en* x.

41. Parmi ces équations, celles dont l'intégrale renferme *algébriquement* les deux constantes correspondent soit au type (I), soit au type (III) où $\alpha = \beta = 0$ (équations linéaires du second ordre) (¹); les équations dont l'intégrale est une fonction *essentiellement transcendante des deux constantes* correspondent soit au type (III) (où α, β ne sont pas nuls tous deux non plus que γ, ε), soit au type (VI) (où α, γ ne sont pas nuls tous deux non plus que β, δ), soit au type (VIII). Pour toutes les autres équations, l'intégrale est une fonction *semi-*

(¹) Cette double classe d'équations est la seule que mettrait en évidence la méthode de M. Poincaré étendue du premier ordre aux équations (f).

transcendante des constantes et dépend de quadratures combinées ou non avec une équation de Riccati. Enfin, les seules équations (f) à points critiques fixes, dont l'intégrale présente des *singularités transcendantes mobiles*, se ramènent au type intégrable (VII) (où $\lambda \neq 0$); ces singularités sont des points essentiels *isolés*.

La méthode permet aussi de former explicitement toutes les équations (f), à points critiques fixes, où le coefficient différentiel ρ est assujetti à une des conditions suivantes :

1° ρ est rationnel en Y_X, Y et analytique en X;

2° ρ est rationnel en $Y'_{X'}$, algébrique en Y, X;

3° ρ est rationnel en $Y'_{X'}$, Y et indépendant de X (problème de M. Picard), ou encore ρ (indépendant de X et rationnel en Y'_X) est algébrique en Y.

Dans ce troisième cas, les équations considérées sont toutes intégrables.

J'ai résolu également le problème inverse des précédents, qui consiste à décider si une équation (f) *donnée* a ses points critiques fixes. D'une façon précise, *étant donnée une équation* (f) *où* ρ *est rationnel en* Y'_X, Y *et algébrique en* X, *on sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques très simples et vraiment praticables, si elle a ses points critiques fixes*. Le théorème subsiste si ρ *est rationnel en* Y'_X, *et algébrique en* Y, X, mais comporte toutefois un cas d'exception : dans ce cas, on sait ramener l'équation donnée à une équation (VII) où λ est une constante différente de zéro (équation intégrable); pour que cette équation ait vraiment ses points critiques fixes, il faut que la condition *transcendante* $\lambda = \frac{i\pi}{\omega}$ soit remplie.

42. *Transcendantes uniformes nouvelles engendrées par une équation* (f). — D'après ce qui précède, parmi toutes les équations à points critiques fixes de la forme (f) où ρ est rationnel en Y'_X et algébrique en Y, X, les seules qui puissent engendrer des transcendantes nouvelles sont réductibles à l'équation (VIII) ou aux équations (III), (VI) (dans lesquelles α et β ne sont pas nuls à la fois). La transformation de passage entre l'équation donnée (f) et le type réduit peut s'écrire

$$Y = \varphi(y, X), \qquad x = l(X),$$

si le type réduit est (VIII) ou (III); et

$$Y = \varphi(y, X), \qquad e^x = l(X),$$

si le type réduit est (VI); φ *est rationnel en* y et *algébrique, ainsi que* l, *en* X.

L'intégrale de l'équation (VIII) se laisse mettre sous une forme simple. Représentons par $y = \lambda_{x_0}(u)$ la fonction elliptique définie par l'égalité

$$u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x_0)}};$$

la transformation $y = \lambda_x(u)$ ramène (VIII) à l'équation linéaire

$$u'' + \frac{2x-1}{x(x-1)}u' + \frac{u}{4x(x-1)} = a(x),$$

dont l'intégrale générale est $u = u_1(x) + C_1\omega_1(x) + C_2\omega_2(x)$, si ω_1 et ω_2 désignent les périodes de $\lambda(u)$ et C_1, C_2 deux constantes arbitraires. Les transcendantes définies par (VIII) ne sont donc pas vraiment nouvelles, *quand on regarde comme connue la fonction* $sn_{k^2}u$ *des deux variables* u *et* k^2. Mais la correspondance *essentiellement biuniforme* que l'intégrale de (VIII) définit (pour $\overline{x}$ et $\overline{x_0}$ donnés) entre les deux cylindres de l'espace y, z, t

$$z^2 = y(y-1)(y-\overline{x}), \qquad z_0^2 = y_0(y_0-1)(y_0-\overline{x_0})$$

est extrêmement intéressante (*voir* § 21).

Pour ce qui est des types (III) et (VI), leur intégrale $y(x)$ est une *fonction de* x *méromorphe dans tout le plan*. On peut ramener d'ailleurs ces équations à trois types canoniques plus réduits

(IX) $\qquad y'' = 6y^2 + x,$

(X) $\qquad y'' = 2y^3 + xy + \alpha,$

(XI) $\qquad y'' = \dfrac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \dfrac{\delta}{y}\right)$

$$\left\{\begin{array}{lllll} & \gamma = -1, & \delta = 1, & & \alpha, \beta \text{ quelconques,} \\ \text{ou} & \gamma = -1, & \delta = 0, & \beta = 1, & \alpha \text{ quelconque,} \\ \text{ou} & \gamma = 0, & \delta = 0, & \alpha = -1, & \beta = 1. \end{array}\right.$$

L'intégrale de ces équations étant méromorphe, il est bien évident qu'elle est représentable par un quotient de fonctions *entières*. Mais ce que j'ai montré (et qui était loin d'être évident) c'est qu'*on peut choisir ces fonctions entières de manière qu'elles vérifient une équation différentielle algébrique (très simple) du troisième ordre*. Ces fonctions, entières en x, sont également *entières en* x_0, y_0, y'_0 pour (IX) et (X); pour l'équation (XI), *elles sont encore entières en* x_0, y'_0, *mais elles admettent* $y_0 = 0$ *comme point essentiel;* si l'on pose $y_0 = e^{z_0}$, elles sont entières en x_0, z_0, y'_0. Quand on les développe suivant les puissances croissantes de $(x - x_0)$, les coefficients de ces développements sont des polynomes en x_0, y_0, y'_0 pour (IX) et (X), en e^{x_0}, y_0, $\frac{1}{y_0}$, y'_0 pour (XI), et ils se calculent par dérivations successives. Ces développements convergent dans tout le champ des x, x_0, y_0, y'_0 et l'intégrale $y(x)$ est représentée par le quotient de deux tels développements. *Les équations* (IX), (X) *et* (XI) *se trouvent ainsi intégrées, au sens moderne du mot.*

La correspondance *essentiellement biuniforme* que l'intégrale de (IX) ou de (X) établit entre les couples (y, y') et (y_0, y'_0) est remarquable : les fonctions y et y' de y_0, y'_0 ne prennent nulle part la forme $\frac{0}{0}$ (ainsi qu'il arrive aux *points-bases* d'une substitution de Cremona), mais elles sont *méromorphes* (et non *rationnelles*) en y_0 et y'_0.

Voici comment s'effectue la représentation des intégrales des équations (IX), (X) et (XI) à l'aide de fonctions entières :

Pour l'équation (IX), on pose

$$z = \frac{y'^2}{2} - 2y^3 - xy, \qquad u = e^{\int z\,dx};$$

la fonction $u(x)$ est une fonction *entière* qui vérifie l'équation

$$\frac{z''^2}{2} + 2z'^3 + xz' - z = 0, \qquad \text{où} \qquad z = \frac{u'}{u},$$

et l'on a

$$y = \frac{u'^2 - uu''}{u^2}.$$

Pour l'équation (X), on pose

$$z = y' - y^4 - xy^2 - 2\alpha y, \qquad u = e^{\int z\,dx}, \qquad v = uy;$$

les fonctions u, v sont des fonctions *entières* qui vérifient le système

$$uu'' - u'^2 + v^2 = 0, \qquad (u'v - vu')^2 = v^4 + xv^2u^2 + (2\alpha v + u')u^3,$$

et l'on a

$$y = \frac{v}{u}.$$

De plus, soient $2z_1 = z - y$, $2z_2 = z + y$; les fonctions $u_1 = e^{\int z_1 dx}$, $u_2 = e^{\int z_2 dx}$ sont deux fonctions *entières* qui vérifient respectivement une équation du troisième ordre très simple, et l'on a

$$u = u_1 u_2, \qquad v = (u'_2 u_1 - u'_1 u_2), \qquad y = \frac{u'_2}{u_2} - \frac{u'_1}{u_1}.$$

Pour l'équation (XI), on pose

$$2\zeta = \frac{y'^2}{y} + \left(\frac{\delta}{y^2} - \gamma y^2\right)e^{2x} + 2e^x\left(\frac{\beta}{y} - \alpha y\right),$$

puis

$$2z = \zeta - \frac{y'}{y} + \frac{1}{2}, \qquad 2Z = \zeta + \frac{y'}{y} + \frac{1}{2},$$

enfin

$$u = e^{\int z dx}, \qquad v = e^{\int Z dx};$$

les fonctions u, v sont des fonctions *entières* qui vérifient les équations

$$\frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{u^2} = -\frac{ve^x}{u}\left(\frac{\gamma e^x v}{u} + \alpha\right),$$

$$\frac{v''}{v} - \frac{v'^2}{v^2} = \frac{ue^x}{v}\left(\frac{\delta e^x u}{v} + \beta\right).$$

On peut remplacer une des équations précédentes par l'équation

$$\left(\frac{v'}{v} - \frac{u'}{u}\right)^2 - 2\frac{v'}{v} - 2\frac{u'}{u} + 1 + e^{2x}\left(\delta\frac{u^2}{v^2} - \gamma\frac{v^2}{u^2}\right) + 2e^x\left(\beta\frac{u}{v} - \alpha\frac{v}{u}\right) = 0;$$

y est alors représenté par le quotient $\frac{v}{u}$.

Enfin, si l'on pose

$$2z_1 = z - ye^x, \qquad 2z_2 = z + ye^x,$$

$$2Z_1 = Z - \frac{e^x}{y}, \qquad 2Z_2 = Z + \frac{e^x}{y}$$

et

$$u_1 = e^{\int z_1 dx}, \qquad u_2 = e^{\int z_2 dx}, \qquad v_1 = e^{\int Z_1 dx}, \qquad v_2 = e^{\int Z_2 dx},$$

les fonctions u_1, u_2, v_1, v_2 sont des fonctions *entières* qui vérifient respectivement une équation différentielle du *troisième ordre*, et l'on a

$$u = u_1 u_2, \qquad v = v_1 v_2, \qquad e^x y = \frac{u'_2}{u_2} - \frac{u'_1}{u_1}, \qquad \frac{e^x}{y} = \frac{v'_2}{v_2} - \frac{v'_1}{v_1}.$$

43. *Irréductibilité des nouvelles transcendantes.* — Mais les nouvelles transcendantes ainsi définies n'étaient-elles pas réductibles aux transcendantes connues? C'était là une question qu'il importait de trancher.

Appelons, pour abréger, fonctions *classiques* les fonctions algébriques, les fonctions abéliennes (et dégénérescences) et les intégrales des équations différentielles linéaires algébriques. Embrassons aussi, parmi les fonctions classiques, les *combinaisons explicites* de telles transcendantes : j'entends par là les fonctions obtenues en remplaçant dans une fonction classique (par exemple dans une fonction abélienne) les arguments par des fonctions classiques de nouvelles variables (par exemple par des quadratures en x), et ainsi de suite. Cette terminologie admise, j'ai démontré que *chaque fonction méromorphe définie par les équations* (IX), (X) *et* (XI) *est une transcendante distincte des transcendantes classiques.*

Cette discussion m'a conduit à introduire [63, 96] une définition extrêmement précise de l'*irréductibilité* d'une équation différentielle. Je ne puis entrer ici dans les détails de cette définition. Je me borne à indiquer qu'elle s'impose et que les théorèmes que j'en ai déduits doivent jouer un rôle dans toutes les questions où, parmi les variables, il en est une qui est imposée comme variable *indépendante* et les autres comme fonctions. C'est cette définition, d'ailleurs, qu'on a adoptée au fond dans l'étude de la réductibilité des équations *linéaires*. Mais il est clair qu'une équation, *irréductible* au sens dont je parle, peut cesser de l'être si l'on donne au mot *réductible* une signification plus large. Par exemple, les équations du troisième ordre qui définissent les fonctions fuchsiennnes sont irréductibles, à mon sens, et leurs intégrales sont des transcendantes uniformes vraiment nouvelles, quoiqu'une quelconque de ces équations soit équivalente à une équation de Riccati ; mais cette équivalence exige que l'on permute le rôle de la fonction et de la variable.

De même, l'équation (VIII) (qui peut servir à définir la fonction sn *regardée comme fonction de son module*) est *irréductible*, au sens que je donne à ce mot, bien qu'elle possède deux intégrales premières définies par des quadratures et par une équation linéaire du deuxième ordre. Mais il en est tout autrement pour les équations (IX), (X) et (XI). La théorie des groupes ne fournit aucun moyen de les intégrer par une combinaison (si enchevêtrée qu'elle soit) d'équations linéaires, de quadratures ou d'équations de premier ordre.

J'ai insisté, dans l'Introduction, sur le caractère essentiellement nouveau de ce résultat. Depuis la fondation du Calcul intégral, toutes les équations qu'on a réussi à intégrer (au sens le plus large du terme) sont réductibles à des combinaisons d'équations linéaires ou de quadratures. Les fonctions automorphes elles-mêmes, je viens de le rappeler, n'échappent pas à cette remarque. *Les équations* (IX), (X) *et* (XI) *constituent donc le premier exemple connu d'équations qui se trouvent intégrées à l'aide des principes de la théorie des fonctions, sans qu'on sache les ramener d'aucune manière à une combinaison d'équations linéaires et de quadratures.*

Quant au degré de généralité des équations qu'intègrent les nouvelles transcendantes, on s'en rend compte si l'on remarque que parmi les équations

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = P\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right),$$

où P est un polynome en Y′, Y, algébrique en X, celles qui sont réductibles algébriquement soit à l'équation (IX), soit à l'équation (X) *où* α *est donné,* forment respectivement une classe aussi étendue que les équations linéaires, non homogènes, du deuxième ordre.

44. *Équations différentielles quelconques à points critiques fixes.* — La méthode que j'ai employée s'applique aussi bien [76 à 80, 90] aux équations

$$P(y'', y', y, x) = 0, \tag{F}$$

algébriques en y'', y', y, x et de degré *donné* en y''. J'ai abordé la formation des équations (F) à points critiques fixes, où P est du *deuxième degré* en y''.

Sans avoir achevé l'énumération de tous les types, ce qui n'est d'ailleurs qu'une question de patience, j'ai réussi déjà à mettre en évidence certaines équations dont l'intégrale générale est une fonction méromorphe nouvelle, irréductible aux transcendantes méromorphes qu'engendrent les équations du premier degré en y''.

Quand on passe des équations du second à celles du *troisième* ordre, il convient de distinguer entre les deux parties de la méthode. La première (recherche des conditions *nécessaires* pour que les points critiques soient fixes) s'étend d'elle-même aux systèmes différentiels d'ordre quelconque; la seconde (dont l'objet est de reconnaître si ces conditions sont *suffisantes*) présente des complications qui croissent avec l'ordre différentiel.

Je crois devoir insister sur la simplicité et la fécondité de la première partie de la méthode. Elle fournit, presque sans calcul [91, 92, 96], des renseignements extrêmement précis sur les équations algébriques d'ordre quelconque q

$$P(y^{(q)}, y^{(q-1)}, \ldots, y', y, x) = 0$$

(P désignant un polynome). C'est ainsi qu'elle limite immédiatement le degré de P en $y^{(q-1)}$ et $y^{(q-2)}$ en fonction du degré de P en $y^{(q)}$. Elle introduit, de la façon la plus naturelle, une notion fondamentale, la notion de *simplifiée* d'une équation $P = 0$. Je définirai cette *simplifiée* pour une *équation du troisième ordre résolue en* y'''.

Soit donc

$$y''' = R(y'', y', y, x)$$

une équation où R est rationnel en y'', y', algébrique en y, x. Pour que l'équation ait ses points critiques fixes, voici les conditions les plus simples qui doivent être remplies :

1° R est nécessairement un polynome du deuxième degré au plus en y''

$$y''' = Ay''^2 + By'' + C. \tag{1}$$

2° La fraction rationnelle A de y' est de la forme

$$\frac{\alpha}{y'+a} + \frac{\beta}{y'+b} + \frac{\gamma}{y'+c},$$

où a, b, c sont des fonctions algébriques de y, x, et α, β, γ certains nombres commensurables qui peuvent être nuls.

3° Les fractions rationnelles B, C de y' n'ont que des pôles simples qui coïncident nécessairement avec ceux de A, et les expressions $\frac{B}{y'}$, $\frac{C}{y'^3}$ restent finies pour $y' = \infty$. *Le degré de* R *en* y'' *et* y' *est ainsi limité.*

On peut, en outre, écrire

$$A = \frac{(\alpha + \varepsilon)}{y'}, \qquad B = y'[\lambda(y, x) + \varepsilon_1], \qquad C = y'^3[\mu(y, x) + \varepsilon_2],$$

ε, ε_1, ε_2 tendent vers zéro avec $\frac{1}{y'}$;

$\alpha = 1 - \frac{1}{n}$, n entier $+$ ou $-$ mais $\neq -1$, ou $n = \infty$.

4° Convenons d'appeler *simplifiée* de l'équation (1) l'équation

$$(2) \qquad y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + \lambda(y, x_0)\, y'' y' + \mu(y, x_0)\, y'^3.$$

Cette équation doit avoir son intégrale uniforme.

Ce qui fait l'intérêt de cette *simplifiée* (2), c'est que les propriétés et les singularités de l'équation (1) s'y reflètent en quelque sorte en s'y affaiblissant. Toute équation (2) se ramène, moyennant une quadrature, à une équation linéaire; d'une façon précise, elle équivaut au système

$$(3) \qquad \frac{dx}{dy} = u^{\frac{-n}{n+1}}, \qquad \frac{d^2 u}{dy^2} = \lambda(y, x_0)\frac{du}{dy} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\mu(y, x_0)\, u.$$

Il m'a donc fallu résoudre ce problème préliminaire qui n'était pas sans difficulté : *Déterminer tous les cas où les fonctions* $y(x)$ *définies par un système* (3) *sont uniformes*. Pour $n = -2$ et $\lambda = 0$, les fonctions uniformes définies par un système (3) constituent la classe des fonctions *automorphes* : c'est le cas le plus intéressant; dans les autres cas, les fonctions $y(x)$ sont des dégénérescences de fonctions automorphes ou des combinaisons de telles dégénérescences.

Quant aux relations qui existent entre une équation (1) à points critiques fixes et sa simplifiée, sans les avoir approfondies encore dans le détail, je puis résumer ainsi l'impression que m'en donnent mes premières recherches : Les méthodes employées pour le second ordre suffiront à déterminer toutes les équations (1) dont l'intégrale n'a comme singularités mobiles que des pôles; pour ce qui est des équations (1) à points critiques fixes, mais à singularités essentielles mobiles, il est probable (au moins dès que ces singularités sont un peu compliquées) qu'elles se ramènent au second ordre ou bien que leur intégrale se déduit aisément de celle de la simplifiée, par des quadratures, par exemple, ou par l'intermédiaire d'une équation linéaire. La plus grave difficulté qu'entraîne l'élévation de l'ordre, à savoir l'apparition de singularités essentielles mobiles (formant des ensembles parfaits, des lignes, etc.) se trouverait ainsi surmontée, grâce aux connaissances que nous possédons sur les fonctions automorphes. Quoi qu'il en soit de ces prévisions, les résultats dès maintenant acquis suffisent à mettre en évidence le rôle primordial que sont appelés à jouer, dans l'étude systématique des équations différentielles à intégrale uniforme, les travaux de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes et kleinéennes.

45. Voici donc un admirable champ de recherches ouvert désormais à l'activité des géomètres : la formation directe et l'étude complète de toutes les équations du troisième ordre à intégrale uniforme exigera vraisemblablement de longues années, mais c'est là un problème dont nous prévoyons dès maintenant la solution, alors que le même problème relatif au second ordre semblait, il y a peu de temps encore, devoir être définitivement abandonné.

Il est naturel de se demander quel rôle sont destinées à jouer, *dans la théorie des fonctions*, les nouvelles transcendantes que j'ai découvertes et celles qu'on est appelé à découvrir par les mêmes voies. Si l'on réfléchit que toutes les transcendantes usuelles [la fonction Γ et la fonction $\zeta(s)$ de Riemann exceptées] intègrent des équations différentielles algébriques, on conçoit aussitôt combien il est invraisemblable qu'on se trouve avoir épuisé, parmi toutes les transcendantes uniformes qu'engendrent les équations différentielles, celles qui sont dignes d'intérêt. Mais il est invraisemblable aussi que la plupart de ces transcendantes possèdent à la fois (comme les fonctions elliptiques, fuchsiennes, etc.) plusieurs propriétés *exactes* et simples (telles que la périodicité, la représentation par des intégrales définies ou par des séries élémentaires, etc.). C'est bien plutôt au point de vue *approximatif*, j'entends au point de vue de la *croissance* pour

$x = \infty$, du *genre*, de la disposition des *zéros*, etc., qu'on aura chance d'étudier avec fruit les nouvelles transcendantes entières et d'en apercevoir certains caractères qui soient susceptibles d'une application efficace à la théorie générale des fonctions. Dans ce mode de recherches, la méthode qui m'a permis de mettre en évidence les nouvelles transcendantes méromorphes fournit dès maintenant de très précieuses indications. Je citerai comme exemple ce théorème : *Si $y(x)$ est une intégrale d'une des équations* (IX) *ou* (X), *l'équation $y(x) = A$ a une infinité de racines quel que soit* A (*fini ou infini*). *La fréquence de ces racines pour $x = \infty$ est la même quel que soit* A.

Mais, quel que doive être par la suite l'intérêt intrinsèque des nouvelles transcendantes, le résultat auquel j'attache le plus d'importance et qui est acquis, c'est la découverte de types d'équations différentielles essentiellement nouveaux, intégrables par des fonctions méromorphes.

Je passe maintenant aux relations assez inattendues que j'ai découvertes entre les équations à points critiques fixes et certaines théories analytiques.

Applications de la théorie des équations à points critiques fixes.

46. *Du rôle des équations à points critiques fixes dans la recherche des intégrales premières des systèmes différentiels.*

Considérons un système (S) de $(m+n)$ équations différentielles (algébriques) du premier ordre [1], portant sur les $(m+n+1)$ variables $x, x_1, \ldots, x_m$ et $y_1, \ldots, y_n$. Il nous est loisible de supposer les coefficients différentiels de ce système exprimés rationnellement en fonction des x, y et d'une irrationnelle $z = f(x, x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n)$.

Ceci posé, cherchons à déterminer les *intégrales premières de ce système* ALGÉBRIQUES *en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et analytiques en $x, x_1, \ldots, x_m$*. Il suffit, comme il est bien connu, de considérer les intégrales *rationnelles en $y_1, y_2, \ldots, y_n, z$*.

---

[1] Ce qui va suivre s'appliquerait à tout système différentiel (algébrique) à plusieurs variables indépendantes, mais dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre fini de constantes.

Admettons d'abord que *le système* (S) *ne possède pas d'intégrale première*, $F(x, x_1, \ldots, x_m) = \text{const.}$, *indépendante des* y.

Le théorème fondamental que j'ai établi [62, 64, 74] s'énonce alors ainsi :

Toutes les intégrales premières de S *rationnelles et de degré donné en* $y_1, \ldots, y_n, z$, *soit* $R(y_1, \ldots, y_n, z, x, x_1, \ldots, x_m) = \text{const.}$, *ne dépendent que d'un nombre fini de constantes. De plus, les singularités non polaires de* R *dans le champ des* $x, x_1, \ldots, x_m$ *sont fixes* (*indépendantes des constantes*) *et données par une certaine relation algébrique* $H(x, x_1, \ldots, x_m) = 0$.

Il suit de là que le calcul de ces intégrales dépend d'un certain système différentiel (algébrique) dont non seulement les points critiques, mais toutes les singularités non polaires sont *fixes*.

Par exemple, une équation différentielle du second ordre, qui admet des intégrales premières algébriques en y'_x, se ramène soit à une équation à points critiques fixes, soit à une équation du premier ordre dont les coefficients dépendent d'une équation de Riccati ou d'une quadrature.

Quand le système S admet des intégrales premières

$$F(x, x_1, \ldots, x_m) = \text{const.},$$

les intégrales premières $R = \text{const.}$, rationnelles et de degré donné en $y_1, \ldots, y_n, z$, dépendent, quand il en existe, de fonctions arbitraires. Une fois calculées les intégrales $F = \text{const.}$, la détermination des intégrales $R = \text{const.}$ ne dépend plus que d'un système différentiel dont les seules singularités mobiles sont ses pôles.

47. J'insiste sur certaines conséquences assez paradoxales de ce théorème. Si le système S n'admet qu'une intégrale première [1] algébrique en $y_1, \ldots, y_n$, cette intégrale est donnée par une équation de *Riccati* ou par une *quadrature* quand elle dépend effectivement des y ; quand elle est indépendante des y, elle est donnée par une *équation du premier ordre* qui peut être de nature quelconque.

---

[1] On ne regarde pas comme distinctes deux intégrales premières dont l'une est fonction de l'autre.

Plaçons-nous dans le cas où il n'existe pas d'intégrale première $F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \text{const.}$ Le système différentiel à points critiques fixes dont dépendent les intégrales premières $R = \text{const.}$ peut, *a priori*, être de la classe *générale* ou de la classe *singulière;* autrement dit, R peut renfermer ses constantes sous forme *algébrique* ou *transcendante*. Il est deux cas où les constantes figurent à coup sûr algébriquement : d'abord quand il n'existe pas deux intégrales R *distinctes* de degré donné; ensuite quand le groupe de variables $x, x_1, \ldots, x_m$ se réduit à l'unique variable x.

Au lieu d'intégrales rationnelles considérons des intégrales *uniformes* par rapport à $y_1, \ldots, y_n, z$, soit $\rho(y_1, \ldots, y_n, z, x_1, \ldots, x_m) = \text{const.}$ Si le système (S) n'admet pas d'intégrale première indépendante des y, j'ai montré que *les singularités critiques de ρ dans le champ de x sont fixes* (mais non les singularités essentielles).

Quand on substitue aux intégrales premières une *équation intégrale* rationnelle en $y_1, \ldots, y_n, z$, soit $R(y_1, \ldots, y_n, z, x, x_1, \ldots, x_m) = 0$, les propositions précédentes sont en défaut; R peut présenter, dans le champ des x, des singularités quelconques. Prenons comme exemple le système

$$(s) \qquad \frac{dx_1}{dx} = y, \qquad \frac{dy}{dx} = 0,$$

toutes les égalités $y - \varphi(x, x_1) = 0$, déduites de l'équation de Clairaut la plus générale $xy - x_1 = F(y)$, sont des équations intégrales de (s) rationnelles en y.

J'ai pu néanmoins établir sur la nature des singularités de ces équations intégrales $R = 0$ quelques propositions précises qui m'ont été très utiles dans l'étude des équations du second ordre à points critiques fixes et surtout dans la recherche des intégrales premières des équations de la Dynamique. J'y reviendrai à propos de ces dernières équations (*voir* le § 59).

48. *Équations différentielles spéciales.* — Parmi les nombreuses applications analytiques des propositions précédentes, je citerai [44, 62] l'*étude des équations différentielles d'ordre n dont l'intégrale peut se mettre sous la forme*

$$(1) \qquad P(C_1, C_2, \ldots, C_n, x, y) = 0$$

où P *est un polynome par rapport aux constantes* $C_1, \ldots, C_n$, *analytique en* x, y. Ces équations renferment en particulier des équations (*voir* § 37) dont l'intégrale $y(x)$ est une fonction algébrique des constantes.

En m'appuyant sur le théorème général du § 46, j'ai montré que *l'intégration d'une telle équation se ramène toujours à celle d'un système différentiel dont toutes les singularités non polaires sont fixes.*

Ce système peut être de la classe *générale* ou de la classe *singulière*. Il sera sûrement de la classe générale et se ramènera par suite aux quadratures ou aux équations linéaires si, moyennant une transformation effectuée sur les variables x, y, l'intégrale générale $y(x)$ de l'équation donnée peut être rendue algébrique.

C'est ce qui a lieu notamment pour les équations du second ordre dont l'intégrale peut s'écrire

$$C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y) + f_3(x, y) = 0;$$

l'intégration d'une telle équation équivaut à celle d'une équation linéaire (résultat connu).

Soit donnée, d'après cela, une équation différentielle algébrique dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme (1), où P désigne un polynome de degré *donné* en $C_1, \ldots, C_n$, dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x, y. L'équation de Kummer, par exemple, rentre dans cette classe. Proposons-nous de *reconnaître si l'intégrale générale d'une telle équation donnée* ($\mathcal{E}$) *est algébrique.*

La réponse est la suivante : « On sait résoudre le problème à l'aide d'un nombre fini d'opérations ou bien on ramène l'équation soit aux quadratures, soit aux équations linéaires. »

Quand l'équation est ramenée aux quadratures, toute la question est de savoir si deux certains systèmes d'intégrales abéliennes ont les mêmes systèmes (primitifs ou non) de périodes. Quand l'équation est ramenée à une équation linéaire, il reste à décider si cette équation s'intègre algébriquement. Ce problème, nous l'allons voir, se traite algébriquement, ou bien l'on ramène l'équation à une quadrature. D'où cette conclusion : « On sait, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, reconnaître si l'équation ($\mathcal{E}$) s'intègre algébriquement, ou ramener l'équation aux quadratures. »

49. *Équations linéaires.* — Le problème de l'intégration algébrique des équations linéaires et homogènes du deuxième ordre à coefficients rationnels, soit (E), a fait l'objet de travaux considérables dont les conclusions se résument ainsi : *Étant donnée une équation* (E), *on sait, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, reconnaître si son intégrale est algébrique ou ramener l'équation à une quadrature* $e^{\int h(x)dx}$; il reste à décider, dans ce dernier cas, si cette quadrature est algébrique. En m'appuyant sur les théorèmes fondamentaux de M. Jordan, je suis arrivé [4, 5, 7, 8] au même résultat *pour une équation linéaire d'ordre quelconque à coefficients algébriques*. La méthode que j'emploie est presque intuitive et exige le minimum de calculs. Elle permet également de déterminer toutes les intégrales *particulières* $y(x)$ algébriques ou dont la dérivée logarithmique est algébrique ; d'une façon plus précise, si l'on pose $z = \frac{y'}{y}$, elle détermine, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, toutes les intégrales algébriques de l'équation en z.

J'ai traité également la question inverse : *Former*, par exemple, *toutes les équations linéaires et homogènes du troisième ordre à coefficients rationnels dont l'intégrale générale est algébrique*. J'ai donné une solution *explicite* du problème en introduisant certains invariants du groupe projectif, où figurent les rapports de trois intégrales, invariants qui généralisent l'invariant de M. Schwarz relatif à la transformation homographique. Cette méthode correspond exactement à l'élégante méthode par laquelle M. F. Klein a résolu la même question pour le deuxième ordre. Il restait à calculer numériquement ces invariants pour chaque groupe projectif discontinu fini à trois variables homogènes. C'est ce qu'a fait, dans un intéressant travail, M. Boulanger ([1]), qui s'est aussi servi de ces invariants pour traiter la première question et limiter le degré de l'intégrale supposée algébrique quand on se donne l'équation.

J'ajoute que le problème de la transformation, l'équation de Kummer et toutes les questions qui s'y rattachent, se généralisent, par cette voie, de la façon la plus naturelle.

J'ai étendu [3, 8] tous ces résultats aux systèmes d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale dépend linéairement d'un nombre

---

([1]) Thèse; Paris, 1898. *Journal de l'École Polytechnique*; 1898.

P. 11

fini de constantes. La théorie prend une forme particulièrement élégante pour les systèmes dont l'intégrale peut s'écrire

$$z = C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y) + C_3 f_3(x, y);$$

les invariants correspondants avaient été déjà considérés par M. R. Liouville à un point de vue tout différent, puis par M. Goursat.

Enfin, j'ai étudié [44, 63] les systèmes d'équations différentielles qui généralisent l'équation de Riccati; j'ai montré notamment leur *équivalence rigoureuse* avec une équation linéaire. C'est ainsi que l'équation de Riccati, qu'on peut toujours ramener algébriquement à la forme

$$(e) \qquad y' + y^2 + a(x) = 0,$$

est équivalente à l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad z'' + a(x) z = 0;$$

car on a non seulement $y = \frac{z'}{z}$, mais encore

$$z = \sqrt{\frac{(y_2 - y_3)}{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{z_2}{z_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1},$$

y_1, y_2, y_3 désignant trois solutions de (e), et z_1, z_2 deux solutions de (E). Cette remarque bien simple, qui n'a pas été faite jusqu'ici à ma connaissance, montre que, si l'équation (e) s'intègre algébriquement, il en est de même de l'équation (E). Elle subsiste pour les systèmes différentiels d'ordre quelconque qui généralisent l'équation de Riccati.

50. *Relations entre les équations différentielles à points critiques fixes et la théorie des groupes continus.* — La théorie des fonctions m'avait déjà mis en contact avec celle des groupes. C'est ainsi que j'avais été amené à former tous les groupes continus finis algébriques (§ 19) et leurs sous-groupes infinis discontinus (§ 16); je viens de dire, d'autre part, le rôle que j'ai fait jouer, dans l'étude des équations linéaires, à certains invariants du groupe projectif. Mais la manière dont les équations à points critiques fixes interviennent dans la théorie des groupes me parait beaucoup plus remarquable.

Je considère, dans l'espace à $(n + 1)$ dimensions, une surface algébrique qui dépend d'un paramètre x, soit la surface

$$S(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, x) = 0,$$

et je suppose qu'elle admet un groupe fini continu de transformations birationnelles

$$(G) \qquad \begin{cases} Y_i = R_i(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, x, a, b, \ldots, l) & (i = 1, 2, \ldots, n+1), \\ X = x, \end{cases}$$

où les R_i sont rationnels en $y_1, \ldots, y_{n+1}$ et renferment analytiquement x et les constantes $a, b, \ldots, l$. Le théorème que j'ai établi [93, 99] s'énonce ainsi :

Les R_i, regardés comme fonctions de x, n'ont comme singularités mobiles (variables avec les $a, b, \ldots, l$) que des pôles.

Ceci s'applique en particulier lorsque la surface S se réduit au plan $y_{n+1} = 0$ et que le groupe considéré est, par suite, un groupe de transformations de Cremona.

Plus généralement, considérons un groupe continu fini de la forme

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} Y_i = \rho_i(y_1, \ldots, y_n, x, a, b, \ldots, l) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ X = x, \end{cases}$$

où les ρ_i sont algébriques en $y_1, \ldots, y_n$ et dépendent analytiquement de x et des constantes absolues $a, b, \ldots, l$. *Les fonctions ρ_i, regardées comme fonctions de x, n'ont comme singularités mobiles que des pôles ou des points critiques algébriques et n'acquièrent, autour des points critiques mobiles, qu'un nombre fini de valeurs.*

51. Je suppose maintenant qu'un système différentiel quelconque

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, \ldots, y_n, x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

admet un groupe continu *transitif* de transformations telles que (G) : *le système a toutes ses singularités (non polaires) fixes.*

Si le système admet un groupe transitif tel que (Γ), il se ramène algébriquement à un système dont les points critiques et les points transcendants sont fixes.

On serait tenté de croire, à première vue, d'après la nature des groupes G et Γ, que l'intégrale d'un tel système doive renfermer algébriquement ses constantes. Il n'en est rien. Il suffit, pour le voir, de considérer la fonction

$$y = \operatorname{sn}_x(h + C_1\omega_1 + C_2\omega_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = k^2; \quad 2\omega_1(x),\ 2\omega_2(x) \text{ périodes de } \operatorname{sn}_x; \\ h \text{ const. numérique}; \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ const. arbitraires.} \end{array} \right\}$$

Cette fonction vérifie une équation différentielle algébrique du second ordre qui se déduit aussitôt de l'équation (VIII, § 41) et qui admet le groupe de transformations (à deux paramètres a, b)

$$Y = \frac{y \operatorname{cn}_x u \operatorname{dn}_x u + \sqrt{(1-y^2)(1-xy^2)}\, \operatorname{sn}_x u}{1 - xy^2 \operatorname{sn}_x^2 u} \qquad (u = a\omega_1 + b\omega_2),$$

$$X = x.$$

Si l'on pose $t = \sqrt{(1-y^2)(1-xy^2)}$, $z = y'$, les relations ainsi définies entre y, z, t et Y, Z, T forment (pour $\bar{x}$ donné) un groupe de transformations birationnelles en lui-même du cylindre (de l'espace y, z, t)

$$t^2 = (1-y^2)(1-\bar{x}y^2).$$

L'équation a bien ses points critiques fixes, mais l'intégrale renferme les deux constantes sous forme essentiellement transcendante, de quelque manière qu'on les choisisse.

J'ai montré [93, 99] qu'il existe des systèmes différentiels analogues d'*ordre quelconque*, dont l'intégrale a ses points critiques fixes et renferme *toutes* ses constantes sous forme transcendante (de quelque façon qu'on les choisisse). Ces systèmes définissent les *fonctions abéliennes (et dégénérescences) regardées comme fonctions de leurs modules.*

C'est donc un problème qui s'impose que de rechercher toutes les équations du troisième ordre qui admettent un groupe continu (G) à trois paramètres. Cette recherche peut s'effectuer *algébriquement*, et l'on est certain à l'avance que les équations ainsi trouvées auront toutes leurs singularités (non polaires) fixes. Il est vrai que, en vertu de la théorie des groupes, ces équations sont sûrement réductibles à des combinaisons d'équations linéaires et de quadratures; mais cette réduction n'est pas explicite, elle exige des inversions, et les transcendantes ainsi définies pourront être (comme les fonctions fuchsiennes) des fonctions uniformes d'un caractère nouveau.

J'ajoute que si, dans les équations du groupe (G), on suppose les R_i non plus rationnels, mais *uniformes* en $y_1, \ldots, y_{n+1}$, tout ce qui concerne les *points critiques* subsiste ; ces points sont donc encore fixes, mais les singularités transcendantes (non critiques) peuvent être mobiles. Il serait très intéressant de former des systèmes différentiels algébriques (1) admettant un tel groupe transitif de transformations uniformes. Mais tous ceux que j'ai obtenus jusqu'ici s'intègrent par des combinaisons de transcendantes banales.

Enfin, j'ai été amené [93] à considérer des groupes d'une nature un peu plus générale que les groupes (G) et (Γ), à savoir les groupes continus finis

$$Y_i = r_i(y_1, \ldots, y_n, x, a, b, \ldots, l) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$X = \varphi(x, a, b, \ldots, l),$$

où les r_i sont algébriques en $y_1, \ldots, y_n$, analytiques (ainsi que φ) en $x, a, b, \ldots, l$.

Les systèmes différentiels (1) qui admettent un tel groupe transitif (systèmes qui comprennent les équations de définition des fonctions fuchsiennes) n'ont pas nécessairement leurs points critiques fixes, mais, une fois intégré un certain système d'ordre j ($j \leqq 3$) (qui se ramène aux équations linéaires et aux quadratures), les fonctions y_i dépendent d'un certain système d'ordre $(n-j)$ dont toutes les singularités (non polaires) sont fixes.

52. J'ai appliqué notamment [16, 26, 63] ces considérations aux équations du premier ordre.

Quand une équation du premier ordre admet un groupe continu

$$(\gamma) \qquad Y = r(y, x, a), \qquad X = x,$$

où r est algébrique en y et analytique en x, a, son intégrale générale $y(x)$ est sûrement une fonction algébrique de la constante y_0, c'est-à-dire que l'intégrale n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles. Inversement, quand l'intégrale $y(x)$ d'une équation du premier ordre est une fonction algébrique de la constante, l'équation, ou bien s'intègre algébriquement, ou bien admet un groupe continu (γ).

La transformation particulière

$$(2)\qquad Y = \frac{A(x)y + B(x)}{C(x)y + D(x)}, \qquad X = \varphi(x)$$

m'a été également très utile dans la formation explicite des équations du premier ordre dont l'intégrale est une fonction algébrique de la constante. A cette transformation, dont j'ai fait une étude complète, j'ai attaché deux espèces d'invariants. Les premiers sont les analogues des invariants de M. Appell relatifs aux transformations (2) dans lesquelles Y est non plus homographique, mais linéaire en y; ils s'obtiennent en faisant disparaitre le plus de termes possible de l'équation transformée; ils mettent en évidence des cas nombreux d'intégration, mais leur calcul exige des quadratures, et ils introduisent dans certaines questions des constantes d'intégration parasites. Les invariants de la seconde espèce se calculent *algébriquement*. Il convient d'employer l'une ou l'autre espèce suivant la nature des problèmes. Comme application, j'ai déterminé et intégré toutes les équations du premier ordre qui admettent une transformation *continue* (2).

Étude des équations différentielles dans le domaine réel.

53. *Intégration quantitative des équations différentielles dans le domaine réel.* — Les résultats généraux que j'ai obtenus sur les équations différentielles analytiques ne perdent rien de leur importance quand on se restreint au domaine réel. Ils contribuent efficacement à l'*intégration quantitative* des équations différentielles.

Je considère un système différentiel réel

$$(S)\qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, \ldots, y_n, x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où la variable indépendante x est donnée (ainsi qu'il arrive en Mécanique). L'intégration quantitative de ce système consiste : 1° à calculer l'intervalle $x_1 < x_0 < x_2$, dans lequel l'intégrale $y_1(x), \ldots,$

$y_n(x)$, définie par les conditions initiales réelles $y_1(x_0)=y_1^0, \ldots,$ $y_n(x_0)=y_n^0$ reste continue et bien déterminée; 2° à représenter l'intégrale avec une approximation indéfinie dans cet intervalle $\overline{x_1 x_2}$, qui sera dit *domaine de régularité* de l'intégrale.

Il est bien facile (comme l'a montré le premier M. Poincaré pour les équations analytiques) de former des développements de l'intégrale qui convergent à coup sûr dans tout l'intervalle *de régularité*, mais il faut se garder de croire que le problème de l'intégration quantitative soit pour cela résolu. Sauf dans des cas très particuliers, on n'a, en effet, aucun moyen de déterminer en fait, même approximativement, le domaine de convergence de ces développements; on ne sait ni décider si, pour une valeur de x un peu éloignée de x_0, les séries employées convergent ou divergent, ni calculer (à supposer qu'on soit dans le domaine de convergence) une limite de l'erreur commise en arrêtant ces séries à un certain terme.

En réalité, *la véritable difficulté du problème quantitatif consiste à déterminer, avec une approximation indéfinie, le domaine de régularité de l'intégrale;* ce domaine une fois connu, la méthode qui a permis de le calculer fournit [60, 63] (de par la nature même des choses) une limite supérieure du reste des diverses séries convergentes qui permettent de représenter l'intégrale dans tout le domaine.

54. *Détermination du domaine de régularité des intégrales.* — On conçoit d'après cela quel intérêt il y a à savoir reconnaître qu'une intégrale quelconque d'un système (S) ne présente dans un champ réel étendu (par exemple, dans tout le champ) aucune singularité. Pour fixer les idées, supposons le système (S) *analytique*, et admettons qu'on ait démontré que l'intégrale générale $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ne présente dans tout le champ réel que des *pôles;* j'ai établi [63, 98] que, dans ce cas, *l'intégrale se laisse représenter dans tout le champ réel par le quotient de deux séries de polynomes en x, dont les coefficients se calculent à l'aide de x_0, $y_1^0, \ldots, y_n^0$ par des dérivations successives.* On sait, d'ailleurs, calculer une limite supérieure du reste des séries.

Or les méthodes que j'ai développées dans le champ *complexe* ont justement pour objet de décider s'il existe ou non des singularités non polaires de l'intégrale : il suffit de les appliquer au champ réel.

Pour abréger, je me limiterai aux équations du premier et du second ordre résolues. Je considère d'abord l'équation

$$y' = f(y, x), \tag{1}$$

dans laquelle f désigne une fonction uniforme et holomorphe pour x et y réels et telle que la fonction $z^2 f\left(\frac{1}{z}, x\right)$ soit holomorphe pour $z = 0$ et x réel. Le théorème I du § 23 (un peu modifié) montre que l'intégrale générale de (1) n'a, pour x réel, que des pôles. *On sait donc intégrer quantitativement cette équation.*

Considérons de même l'équation

$$y'' = R(y', y, x), \tag{2}$$

où R est une fraction rationnelle en y', y, x. La méthode que j'ai employée pour former les équations à points critiques fixes suffit à exprimer que l'intégrale de (2) n'a dans le champ réel que des pôles. Restreignons-nous, par exemple, aux équations de la forme

$$y'' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}; \tag{3}$$

je suppose que P et Q sont deux polynomes réels en y, x, respectivement de degré p et q en y, et que Q ne s'annule pour aucune valeur réelle de x, y. Pour que les intégrales réelles de (3) n'aient comme singularités que des pôles, il faut d'abord que p soit au plus égal à $q + 3$. Si $p \leqq q + 1$, on rentre dans un cas connu où les intégrales restent continues quel que soit x. Si $p = q + 2$, il faut de plus et il suffit que l'équation soit réductible par une transformation

$$Y = \lambda(x) y + \mu(x), \qquad X = \varphi(x)$$

à la suivante :

$$Y''_{X^2} = 6Y^2 + a(X) + \frac{b(X) Y^{(q-1)} + b_1(X) Y^{(q-2)} + \ldots}{Y^q + c(X) Y^{(q-1)} + \ldots},$$

avec la condition $\frac{a''(X)}{2} + b(X) \equiv 0$. *Si l'équation donnée* (3) *satisfait à cette condition* (ce que l'on reconnaît presque sans calcul), *son intégration quantitative est achevée.*

Les conditions sont aussi simples quand on a $p = q + 3$.

Nous avons admis que les équations différentielles sont *analytiques ;*

cette restriction n'est nullement nécessaire. Il suffit de substituer au calcul des limites la méthode de Cauchy-Lipchitz pour étendre tous les résultats aux équations réelles quelconques. Admettons, par exemple, que, dans l'équation (1), f soit simplement une fonction réelle de x, y, continue ainsi que $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour x et y réels; admettons de plus que la fonction $f_1(z, x) \equiv z^2 f\left(\frac{1}{z}, x\right)$ satisfasse aux mêmes conditions : *toute intégrale de l'équation* (1) *est représentée, quel que soit x, par le quotient de deux séries uniformément convergentes,* dont les termes ne se calculent plus par des dérivations, mais par des opérations d'approximations.

55. *Développement des intégrales dans le domaine réel.* — Le domaine de régularité d'une intégrale une fois connu, quelle est la meilleure représentation qu'on en puisse donner? Pour m'en rendre compte, j'ai comparé et discuté [82, 83] les diverses méthodes d'approximations que comportent les équations différentielles, en commençant par la plus élémentaire et la plus naturelle de toutes, la *méthode de Cauchy-Lipchitz* (1).

J'ai montré que cette méthode permet de retrouver toute propriété qui résulte d'une quelconque des autres méthodes; mais sa propriété la plus remarquable, c'est qu'elle converge dans tout le domaine de régularité de l'intégrale (2).

Pour préciser, prenons une équation de premier ordre

$$(e) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z),$$

où f a une détermination unique en tout point réel de la surface

$$S(x, y, z) = 0;$$

moyennant une transformation effectuée sur y, z, il est loisible de

(1) J'ai développé cette discussion, ainsi que les propriétés de la méthode de Cauchy-Lipchitz et leur application aux équations de la Mécanique, dans une suite de Leçons professées au Collège de France (janvier, février 1897), mais je n'ai publié ces résultats qu'en juin 1899, après la Note citée ci-dessous de M. Picard.

(2) M. Picard a appliqué cette propriété au domaine complexe dans une Note des *Comptes rendus* (juin 1899).

supposer que toutes les sections de cette surface par les plans $x = \text{const.}$ sont fermées. Enfin, je puis substituer à l'équation (e) le système (compatible avec $S = 0$)

$$(\sigma) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z).$$

J'appelle point *régulier* du système (σ) tout point M de la surface S tel qu'en ce point et dans le voisinage, les fonctions φ et f soient continues et aient, par rapport à y et à z, des dérivées premières continues; j'appelle *point irrégulier* du système, tout point M_1 de S qui ne satisfait pas à ces conditions. Enfin, j'appelle *écart de singularité* d'un point quelconque (x, y, z), la distance minima δ de ce point aux points irréguliers M_1. Toute intégrale $y(x)$, $z(x)$ du système représente une courbe tracée sur S. Quand x varie de x_0 à x_1, je dirai que cette intégrale reste *régulière* si les fonctions $y(x)$, $z(x)$ restent continues et si la courbe qu'elles représentent ne passe par aucun des points irréguliers M_1. Quand l'intégrale cesse d'être régulière pour $x = x_1$, *en général* l'intégrale devient discontinue ou mal déterminée. Cette terminologie admise, j'ai fait voir que *la méthode de Cauchy-Lipchitz converge dans tout l'intervalle où l'intégrale définie par le point* (x_0, y_0, z_0) *est régulière.*

Cette propriété et ces définitions subsistent quand le système différentiel est d'ordre n et porte sur n fonctions $y(x)$, $z(x)$, ...; les intégrales représentent alors des courbes de l'espace à $(n+2)$ dimensions situées sur une surface [à $(n+1)$ dimensions] de cet espace.

Quand on substitue à la méthode de Cauchy-Lipchitz la *méthode d'approximations successives de M. Picard,* les résultats sont bien différents : la méthode peut converger quel que soit x, ou, au contraire, converger seulement dans un intervalle moindre que le diamètre de convergence de la série de Taylor qui représente l'intégrale autour de x_0.

Enfin, si les équations (σ) sont *analytiques,* on peut représenter l'intégrale dans tout le domaine où elle est *holomorphe,* soit à l'aide d'un paramètre auxiliaire comme le fait M. Poincaré, soit en développant $y(x)$, $z(x)$, ... en séries de polynomes composés linéairement avec $y(x_0)$, $y'(x_0)$, ..., et $z(x_0)$, $z(x_0)$, ... J'ai dit plus haut (§ 10) la relation qui existe entre les premières séries que j'ai employées à cet effet et les beaux développements de M. Mittag-Leffler.

Mais ces développements analytiques sont d'une formation extrêmement compliquée, en sorte que la méthode de Cauchy-Lipchitz apparaît comme la plus simple et aussi comme la plus plastique. Il convient de remarquer, en effet, qu'elle peut se combiner heureusement avec les autres méthodes d'approximations; son principe consiste, comme on sait, à décomposer l'intervalle fini $\overline{x_0 x}$ considéré en intervalles de plus en plus petits; dans chacun de ces intervalles partiels, il est loisible de remplacer les approximations de Cauchy par des approximations plus rapides, du moment que l'intervalle est assez petit pour que la convergence des nouvelles approximations soit assurée. Par exemple, si l'on applique la méthode de Cauchy-Lipchitz au problème des trois corps, il est loisible, dans les intervalles partiels rendus suffisamment petits, d'employer les développements trigonométriques de la Mécanique céleste.

56. *Singularités des intégrales dans le domaine réel.* — Mais quel que soit le mode de développement qu'on emploie, ce ne sera jamais que dans des cas tout à fait exceptionnels que la formation de ce développement permettra de déterminer son intervalle de convergence. Il importe donc de se rendre compte avec précision, par une étude directe des équations différentielles, des diverses circonstances qui peuvent interrompre la régularité de l'intégrale.

Si l'intégrale $y(x)$, $z(x)$ ... cesse d'être régulière quand x atteint la valeur x_1, deux hypothèses seulement sont possibles : ou bien le point $(x, y, z, \ldots)$ tend vers un point irrégulier (situé sur la courbe fermée $x = x_1$ de S); ou bien $y(x)$, $z(x)$, ... deviennent discontinues, c'est-à-dire que le point $(x, y, z, \ldots)$ ne tend vers aucun point limite sur S quand x tend vers x_1. Dans ce dernier cas, la valeur x_1 est dans le domaine réel une singularité *essentielle* de $y(x)$, $z(x)$, ...

L'existence possible de singularités essentielles dans le domaine réel semble avoir échappé à l'attention des géomètres. J'en ai approfondi la nature [57, 63]. J'ai montré que quand x tend vers une telle valeur x_1, l'*écart de singularité* (§ 55) du point $(x, y, z, \ldots)$ tend vers o; il suit de là que, dans le cas du premier ordre, les singularités essentielles coïncident nécessairement avec les valeurs fixes x_1 telles que le plan $x = x_1$ coupe S suivant une ligne de points irréguliers du système. Dès que l'ordre différentiel dépasse l'unité, une valeur $x = x_1$ quelconque peut être singularité essentielle de certaines intégrales. C'est ce qui arrive, par exemple, pour le système

$$\frac{dy}{dx} = uz, \qquad \frac{dz}{dx} = -uy, \qquad u' = u^2$$

qui admet les intégrales

$$y = \cos\log(x - x_1), \qquad z = \sin\log(x - x_1), \qquad u = -\frac{1}{x - x_1}.$$

Dans le champ réel comme dans le champ complexe, l'existence possible de telles singularités, que rien ne met en évidence sur les équations différentielles, constitue un des plus graves obstacles qui s'opposent à l'intégration quantitative dans les problèmes où la variable indépendante x est donnée (¹). C'est ce qui fait l'intérêt de ce théorème :

Quand les points irréguliers du système sont isolés sur la surface S *ou forment sur* S *des courbes (à une dimension), l'intégrale* $y(x)$, $z(x)$, ... *ne saurait présenter de singularités essentielles mobiles.*

Or, en changeant les fonctions *sans changer la variable indépendante,* on peut toujours satisfaire à la condition du théorème. Le changement de fonctions se détermine d'ailleurs très simplement sur le système différentiel lui-même. *Si, par exemple, le système est algébrique, moyennant un changement algébrique convenable des fonctions, on est certain que le nouveau système n'a plus, dans le champ réel, de singularités essentielles mobiles.*

C'est en m'appuyant sur ce théorème que *j'ai ramené* (§ 34) *l'étude analytique des singularités essentielles mobiles à l'étude des singularités transcendantes ordinaires dans le champ réel.*

Quand il n'existe aucun point irrégulier sur S, l'intégration quantita-

(¹) Quand on s'occupe seulement de la forme des courbes définies par le système différentiel dans l'espace $Oxyz$..., il suffit de choisir convenablement les plans coordonnés pour faire disparaître les singularités essentielles de $y(x)$, $z(x)$, ...

tive s'effectue aisément dans tout le domaine réel. Quand de tels points existent, mais ne donnent naissance pour l'intégrale qu'à des singularités *algébriques*, — ce que les méthodes que j'ai développées ont pour objet de reconnaître, — on peut calculer avec une approximation indéfinie le champ de régularité de l'intégrale qui répond aux conditions initiales données.

57. *Résolution imparfaite du problème quantitatif.* — Quand l'intégrale générale présente dans le champ réel des singularités mobiles (essentielles ou transcendantes), ou quand on est incapable de démontrer qu'elle n'en présente pas, j'ai pu du moins [82] donner du problème quantitatif une sorte de solution imparfaite, mais susceptible de rendre de réels services. Sous sa forme la plus précise, le théorème qui réalise cette quasi-solution s'énonce ainsi :

Soient x_0, y_0, z_0, ... des conditions initiales données, x_1 une valeur donnée quelconque de x, ε et δ deux quantités choisies aussi petites qu'on veut. Après un nombre fini d'opérations (nombre dont il est facile de fixer le maximum à l'avance), on peut calculer l'intégrale $y(x)$, $z(x)$, ... avec une approximation ε [1] dans l'intervalle $\overline{x_0 x_1}$, ou bien affirmer que l'écart de singularité du point $(x, y, z, \ldots)$ est devenu, dans cet intervalle, moindre que δ.

Il n'est même pas nécessaire que les conditions initiales soient connues exactement, mais seulement avec une approximation η ($\eta < \varepsilon$ et $< \delta$). Cette remarque est importante pour les applications.

Ce théorème est une conséquence bien simple de la méthode de Cauchy-Lipchitz. J'y reviendrai à propos du problème des trois corps.

[1] J'entends par là que la distance de la position calculée du point $(x, y, z, \ldots)$ à sa position exacte est moindre que ε, et cela pour toute valeur de x comprise entre x_0, x_1.

QUATRIÈME PARTIE.

MÉCANIQUE RATIONNELLE ET MÉCANIQUE CÉLESTE.

Intégrales premières de la Dynamique.

58. *Théorèmes sur les intégrales premières algébriques par rapport aux vitesses.* — Les propositions générales que j'ai obtenues sur les équations différentielles, qu'elles embrassent le domaine complexe ou se restreignent au domaine réel, comportent de très nombreuses applications aux équations de la Mécanique rationnelle. J'indiquerai ici les plus importantes et, tout d'abord, celles qui se rattachent à la recherche des intégrales premières de la Dynamique.

Plusieurs des résultats auxquels je suis parvenu [28, 64] sont relatifs aux intégrales premières quelconques. Mais c'est surtout aux intégrales *algébriques par rapport aux vitesses* que je me suis attaché [64, 74].

On sait le rôle que jouent ces intégrales dans une foule de problèmes. Elles ont de plus la propriété bien remarquable de garder leur caractère quand on substitue aux paramètres qui définissent la position du système matériel d'autres paramètres quelconques.

Je me place dans le cas où les liaisons et les forces sont indépendantes des vitesses et du temps. Le mouvement du système matériel est alors défini par un système différentiel

$$(1)\quad x_i'' = \Pi_i(x_1', \ldots, x_n'; x_1, \ldots, x_n) + K_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les Π_i sont des formes quadratiques en $x_1', \ldots, x_n'$. J'admettrai que les Π_i et les K_i renferment algébriquement les paramètres x, mais il suffit, pour la suite, que ces derniers figurent analytiquement.

Les intégrales premières algébriques par rapport aux vitesses se ramènent aux intégrales rationnelles. Cherchons donc à déterminer les intégrales premières de (1) rationnelles et de degré donné en $x_1', \ldots, x_n'$, soit

$$R(x_1', \ldots, x_n'; x_1, \ldots, x_n, t) = \text{const.}$$

Les théorèmes généraux du § 46 montrent aussitôt [64] que ces intégrales (si elles existent) dépendent d'un nombre *fini* de constantes, et que R *ne peut admettre, dans le champ des* x, *que des singularités polaires en dehors des valeurs des* x *pour lesquelles les seconds membres de* (1) *cessent d'être réguliers*. Ces valeurs sont données par une certaine relation algébrique connue

$$G(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Les intégrales $R = \text{const.}$ se laissent donc définir par un système différentiel ordinaire à singularités (non polaires) fixes. Quand ces intégrales sont *entières* en $x'_1, \ldots, x'_n$, ce dernier système est simplement un système *linéaire;* mais quand elles sont *fractionnaires*, le système en question peut, *a priori*, être de la classe *générale* ou de la classe *singulière;* c'est-à-dire que R peut renfermer ses constantes sous forme *algébrique* ou *transcendante*. Mais *quand* t *ne figure pas dans l'intégrale*, une relation bien remarquable [64, 74] existe entre les intégrales $R = \text{const.}$ de (1) et les intégrales du même système sans forces [système (1) où les K_i sont nuls]. *Une fois calculées, en effet, toutes les intégrales premières de la forme* $R(x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$ *du système sans forces, les intégrales analogues de* (1) *n'exigent plus que des quadratures, quelles que soient les forces.*

En particulier, si les intégrales $R = \text{const.}$ du système sans forces renferment algébriquement leurs constantes, il en est de même encore quelles que soient les forces.

59. *Cas où les géodésiques du système sont algébriques.* — Un cas très important est celui où les *géodésiques* du système (trajectoires qui correspondent au mouvement sans forces) sont *algébriques;* j'ai montré qu'alors les intégrales

$$R(x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

du système sans forces sont aussi algébriques, et que, par suite, ces intégrales renferment *algébriquement* leurs constantes quelles que soient les forces; leur détermination dépend d'une équation différentielle linéaire. Enfin, écrivons l'intégrale R ainsi

$$R = \frac{P_l + P_{l-1} + \ldots}{Q_m + Q_{m-1} + \ldots},$$

où les P_i, Q_i sont des formes de degré i en $x'_1, \ldots, x'_n$; les égalités $P_l = 0$, $Q_m = 0$ (qui, dans tous les cas, sont des équations intégrales du système sans forces) sont ici nécessairement algébriques ([1]) en $x_1, \ldots, x_n$. Ces divers théorèmes, dont les applications sont illimitées (application aux systèmes de points libres, au corps solide fixé par un point, etc.), ne se laissent démontrer qu'à l'aide de considérations fort délicates de la théorie des fonctions.

C'est ici que commence le rôle des *équations intégrales*. Admettons que, dans le système (1) supposé réel, on ait mis (ce qui est toujours possible) les seconds membres sous forme de fractions rationnelles réelles en $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$, z désignant une certaine irrationnelle

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Pour que le système (1) admette des intégrales *fractionnaires* $R =$ const. irréductibles à des intégrales entières, il faut que le même système sans forces possède des équations intégrales $P = 0$ dont le premier membre soit homogène et entier en $x'_1, \ldots, x'_n$, rationnel et réel en $x_1, \ldots, x_n, z$, et ne devienne pas une intégrale première quand on le multiplie par un facteur convenable $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$.

Une étude approfondie [64, 74] des équations intégrales (algébriques en $x'_1, \ldots, x'_n$) et de leurs *singularités* dans le champ des $x_1, \ldots, x_n$, m'a donné (en outre de nombreux résultats utiles dans la théorie des équations différentielles) des règles très simples pour reconnaître, une fois l'irrationnelle z donnée, si un système (1) sans forces possède des équations intégrales de l'espèce $P = 0$.

Appliquées au mouvement d'un système quelconque de *points libres* soumis à des forces qui dépendent *rationnellement* (ou même sont fonctions *uniformes*) des coordonnées, ces règles montrent que

---

([1]) Il peut exister des équations intégrales algébriques en $x'_1, \ldots, x'_n$ et transcendantes en $x_1, \ldots, x_n$. Si, par exemple, on considère le système

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X(x, y), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y(x, y),$$

les géodésiques sont les droites du plan, et si l'on appelle $u(x, y)$ la fonction définie par une relation telle que $y - ux = e^u$, l'égalité transcendante $y' - ux' = 0$ est une équation intégrale du système sans forces. Mais $P_n = 0$, $Q_m = 0$ ne peuvent coïncider avec de telles équations intégrales.

toute intégrale première du mouvement rationnelle par rapport aux vitesses est une combinaison d'intégrales *entières*.

Le mouvement d'un *solide fixé par un point* prête à une conclusion analogue. D'une manière générale, dans la plupart des problèmes naturels où les géodésiques sont algébriques, le grand intérêt de la méthode est de *ramener la recherche des intégrales premières rationnelles par rapport aux vitesses à celle des intégrales entières.*

Appliquées au *problème des n corps*, les mêmes considérations montrent [74] que (*en dehors des combinaisons des intégrales classiques*) *il n'existe aucune intégrale première algébrique par rapport aux vitesses*, du moment que trois au moins des masses ne sont pas nulles. M. Bruns avait démontré tout différemment un théorème analogue, mais plus restreint, en supposant les intégrales algébriques à la fois par rapport aux vitesses et aux coordonnées.

Les résultats que j'ai obtenus sur les équations intégrales établissent même que *le problème des n corps* (*où trois au moins des masses ne sont pas nulles*) *ne comporte aucune équation intégrale algébrique par rapport aux vitesses et analytiques en* $x_1, \ldots, x_n$, t (en dehors de celles qui sont conséquences des intégrales classiques).

Il suit de là que *les conditions pour qu'il y ait choc entre deux des corps au bout d'un temps fini ne sauraient être algébriques* (comme certains astronomes étaient enclins à le penser). Elles ne sauraient même se traduire par des relations algébriques relativement aux vitesses et transcendantes relativement aux coordonnées.

Il est intéressant de noter le rôle décisif que joue la théorie des fonctions dans des problèmes qui ne semblaient relever que de calculs inextricables.

60. *Intégrales premières uniformes par rapport aux vitesses.* — J'ai étudié aussi [64] les intégrales premières qui sont, non plus rationnelles, mais *uniformes* par rapport aux vitesses. Les théorèmes généraux du § 47 conduisent aisément à la conclusion suivante :

Ne donnons aux quantités x'_i, x_i, t que des valeurs réelles, et admettons qu'une intégrale première $\rho(x'_1, \ldots, x'_n, x_1, \ldots, x_n, t) = \text{const.}$ soit une fonction uniforme des x' dans le champ réel, et dépende analytiquement des x_i, t. Les singularités critiques de ρ (dans le champ réel) coïncident nécessairement avec les valeurs $x_1, \ldots, x_n$, pour lesquelles le système (1) cesse d'être régulier. Quand, dans l'espace $x_1, \ldots, x_n$, ces points exceptionnels forment un ensemble à $(n-j)$ dimensions $(j > 2)$, *l'intégrale ρ est nécessairement uniforme dans tout le champ réel des x', x, t.*

Cette dernière remarque s'applique en particulier au *problème des n corps*. Elle entraîne [74, 94] cette conclusion qui généralise un résultat bien connu de M. Poincaré :

Toute intégrale première du problème, uniforme par rapport aux vitesses, est une conséquence des intégrales classiques.

Toutefois, cette proposition n'est établie (contrairement à ce qui se passait pour le théorème de M. Bruns) que si on laisse les masses arbitraires : il n'est pas certain qu'elle ne puisse être en défaut pour des valeurs particulières des masses.

Intégration quantitative des équations de la Dynamique.

61. *Équations dont l'intégrale générale est uniforme.* — Il est clair qu'on peut appliquer aux équations de la Dynamique les méthodes d'intégration que j'ai développées pour un système différentiel quelconque.

Tout d'abord, on peut étudier [90, 98] les cas où l'intégrale générale d'un système (1) est *uniforme*. C'est ainsi que la méthode que j'ai employée pour former les équations du second ordre à points critiques fixes permet de résoudre de la manière la plus naturelle et la plus simple le problème de M^{me} Kowaleski, en lui donnant même un énoncé plus général :

Déterminer tous les cas où le mouvement d'un solide pesant fixé par un point est défini par des fonctions uniformes de t (1).

Cette généralisation ne conduit d'ailleurs à aucun cas nouveau.

Mais les problèmes qu'on réussira à intégrer ainsi seront forcément exceptionnels. Au contraire, l'intégration quantitative restreinte au

(1) M^{me} Kowaleski suppose les fonctions méromorphes ou, plus exactement, *uniformes et douées de pôles.*

champ réel pourra s'effectuer [60, 61, 63] pour des classes très étendues de problèmes. J'en indiquerai quelques-unes.

62. *Intégration quantitative et singularités dans le champ réel.* — Je considère un système matériel S soumis à des liaisons et à des forces qui sont indépendantes des vitesses et du temps. Le mouvement de ce système est défini par les équations (1), où je ne suppose plus les seconds membres analytiques en $x_1, \ldots, x_n$. Ces équations sont dites *régulières* pour $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ quand les seconds membres sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ à dérivées premières continues dans le voisinage de $(a_1, \ldots, a_n)$. Une position du système S est dite *régulière* si, moyennant un choix convenable des paramètres x, les équations du mouvement sont régulières pour les valeurs des x qui correspondent à cette position.

Ceci posé, admettons que *toutes les positions possibles de* S *soient régulières et que les forces qui s'exercent sur chaque point restent* (¹) *en valeur absolue* (*pour toute position de* S) *inférieures à* AK (MK^2 désignant le moment d'inertie du système par rapport à l'origine et A une certaine constante); *le mouvement est régulier, quel que soit* t, et les fonctions $x_i(t)$, $x'_i(t)$ comportent les diverses représentations indiquées au § 55. C'est là une classe étendue de problèmes qui comprend, en particulier, le problème du corps pesant fixé par un point, dont M. Picard avait déjà effectué l'intégration quantitative.

Supposons encore qu'*il n'existe pas de position singulière du système et que, de plus, les forces dérivent d'un potentiel* $U(x_1, \ldots, x_n)$ *ayant une détermination unique pour toute position de* S; *si* (*quelle que soit la position de* S) $\frac{U}{K^2}$ *reste* (¹) *en module inférieur à une quantité* A, *le mouvement est régulier quel que soit* t.

Ces deux classes de problèmes, intégrables quantitativement dans le domaine réel, se mettent en évidence de la façon la plus élémentaire. Il est clair, d'ailleurs, que les considérations du § 54 permettent d'en découvrir beaucoup d'autres moins apparentes. Mais une foule

(¹) Quand aucun point du système ne peut s'éloigner à l'infini, cette dernière condition est toujours remplie.

de problèmes remarquables, le problème des n corps par exemple, ne rentrent pas dans une telle catégorie : pour ces problèmes, le mouvement peut cesser d'être régulier à un certain instant t_1. Il importe donc de prévoir avec une extrême précision les diverses circonstances qui sont susceptibles d'interrompre le cours normal du mouvement.

Quand t tend vers l'instant t_1, trois hypothèses sont possibles *a priori :*

1° S tend vers une position régulière, mais les x'_i ne tendent pas vers des limites finies;

2° S tend vers une position singulière ou certains de ses points s'éloignent indéfiniment;

3° Les points de S ne tendent vers aucune position limite, ni vers l'infini.

J'ai montré [48] (*et c'est là un point important*) *que la première hypothèse est à rejeter*. Mais les deux autres, et notamment la troisième qui semble si paradoxale, sont réalisables. Imaginons, par exemple, un système de n points libres ($M_1, \ldots, M_n$) qui s'attirent suivant certaines lois satisfaisant au principe de l'action et de la réaction, et telles que la force d'attraction entre deux points devienne (comme pour la loi de Newton) infinie à distance nulle et nulle à distance infinie; on peut choisir les lois d'attraction de façon que, t tendant vers t_1, les n points restent à distance finie *et ne tendent vers aucune position limite;* si, à chaque instant t, $\rho(t)$ désigne la plus petite des distances mutuelles des n points, $\rho(t)$ tend bien zéro avec $t - t_1$, mais il n'en faut pas conclure que deux au moins des points viennent se choquer en un point de l'espace; ce qui arrivera, c'est que, pour t très voisin de t_1, deux des points, soient M_1 et M_2, seront très voisins, puis s'écarteront à distance finie tandis que deux autres points seront devenus très voisins, et ainsi de suite un nombre indéfini de fois.

63. En signalant pour la première fois l'existence de singularités *essentielles* dans les questions de Mécanique, j'écrivais (1) :

« On serait, il est vrai, porté à croire que de telles singularités ne » sauraient se présenter dans les problèmes naturels, puisqu'un sys-

(1) *Leçons de Stockholm*, Introduction, p. 20; janvier 1897.

» tème matériel occupe toujours, à un instant déterminé, une position
» déterminée. L'argument ne serait fondé que si les formules de la
» Dynamique correspondaient *rigoureusement* à la réalité. A ce compte,
» deux points matériels s'attirant suivant les lois de Newton ne
» devraient jamais se rencontrer, parce que la vitesse d'un élément
» de matière ne saurait devenir infinie. Dans ce dernier cas, le para-
» doxe se lève aussitôt quand on remarque que deux éléments maté-
» riels, ayant toujours des dimensions finies, se choqueront avant que
» leurs vitesses soient infinies; mais leurs vitesses au moment du
» choc seront d'autant plus grandes que leurs dimensions seront plus
» petites. C'est une explication du même genre qui rend compte de
» la singularité que je signale; si, pour $t = t_1$, les fonctions $x_i(t)$ qui
» définissent la position de S deviennent indéterminées, c'est que S,
» avant l'instant t_1, passe par un état où les hypothèses et lois de
» forces, qui ont permis de mettre le problème en équations, cessent
» d'être suffisamment exactes; mais S n'atteint cet état qu'après une
» période d'*affolement* d'autant plus accentuée que ces hypothèses et
» lois sont plus voisines de la réalité.

» Il y a donc le plus grand intérêt à savoir reconnaître, sur un sys-
» tème d'équations de Lagrange donné, si les singularités de cette
» nature existent ou non. Quand on montre qu'elles existent, on met
» en évidence la particularité la plus remarquable du mouvement;
» quand on montre qu'elles n'existent pas, on est certain de pouvoir
» suivre indéfiniment le mouvement de S, au moins tant que S ne
» passera pas par une position singulière. »

J'ai donné un certain nombre de théorèmes très précis sur les singularités $t = t_1$ de cette nature, sur le mode d'indétermination des fonctions $x_i(t)$ dans le voisinage d'une telle valeur t_1. J'ai appliqué [61, 63] notamment ces résultats au *problème des n corps*.

64. *Application au problème des n corps.* — Pour ce problème, on sait depuis longtemps (et il est bien aisé de démontrer) que le mouvement reste régulier tant que la plus petite (à l'instant t) des distances mutuelles r_{ij} des astres du système, soit $\rho(t)$, ne s'annule pas; on connaît, par suite, une infinité de développements des $x_i(t)$ qui convergent dans tout l'intervalle de temps où l'on a $\rho(t) > 0$. On ad-

mettait, comme corollaire évident, que le mouvement reste régulier tant que deux au moins des corps *ne se choquent pas*, c'est-à-dire n'arrivent pas à un instant t_1 au même point déterminé de l'espace. Cette conclusion n'est pas légitime; il est possible, *a priori*, que, t tendant vers t_1, le système ne tende vers aucune position limite et que $\rho(t)$ tende vers zéro *sans qu'aucune des distances r_{ij} de deux des astres tende constamment vers zéro avec $(t - t_1)$*.

Pour le cas de TROIS *corps, j'ai fait voir que cette singularité ne saurait se produire;* mais, pour le cas de n corps, j'ai dû laisser la question en suspens (¹). Tout ce que j'ai pu établir, c'est que, si une telle singularité $t = t_1$ existe, elle provient des croisements de ν des astres entre eux ($\nu \geqq 4$), croisements de plus en plus fréquents quand t tend vers t_1 et de plus en plus semblables à des chocs. Ces *pseudo-chocs* ont déjà été signalés par M. Poincaré comme pouvant engendrer (pour $n > 3$) des solutions périodiques d'une nature particulière.

Il suit de là que *la détermination précise des conditions du choc équivaudrait à l'intégration effective du problème des trois corps, mais non du problème des n corps* (²). J'ai commencé, comme je l'ai dit, l'étude de ces conditions; la première question qui se posait était de savoir si ces conditions ne sont pas algébriques; elles sont malheureusement transcendantes (*voir* § 59); quant à leur détermination approchée, si je possède une méthode applicable au cas où *deux* seulement des corps se choquent, je n'ai obtenu jusqu'ici aucun résultat *sur le cas où trois corps se choquent à la fois*. Il y a là un sujet de recherches bien important et bien difficile : l'intégration quantitative *parfaite* du problème des trois corps ne peut faire aucun progrès tant qu'on n'aura pas élucidé les conditions du choc simultané des trois corps.

(¹) D'après un théorème général que j'ai établi (§ 56), la question se ramène à l'étude, dans le champ réel, des intégrales $y_j(t)$ d'un certain système différentiel algébrique Σ, intégrales définies par des conditions initiales y_1^0, .., y_k^0 qui donnent aux coefficients différentiels la forme $\frac{0}{0}$; mais ce système Σ est fort compliqué.

(²) De nouveaux efforts seraient du moins nécessaires pour établir cette équivalence, si elle est vraie.

A défaut d'intégration quantitative parfaite, j'ai appliqué du moins au problème des n corps l'intégration *imparfaite* que j'ai indiquée (§ 57) pour un système différentiel quelconque. Je suis parvenu ainsi, comme je l'ai dit dans l'Introduction, à résoudre ce problème :

Les conditions initiales du système étant données (avec une erreur moindre que ε*), calculer, au bout du temps* T, *la position des astres avec une approximation* ε, *ou bien décider si, dans l'intervalle, la distance de deux au moins de ces astres est devenue* p *fois moindre que leur distance actuelle.*

La méthode de Cauchy-Lipchitz suffit théoriquement à traiter la question $\left(\text{si grands qu'on se donne T}, p \text{ et } \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Mais, dans chaque intervalle partiel, on peut remplacer les opérations de Cauchy par les développements classiques en séries trigonométriques de la Mécanique céleste; il faut seulement prendre ces intervalles partiels assez petits pour que les séries trigonométriques soient convergentes et qu'on connaisse une limite supérieure de leur reste : les derniers travaux de M. Poincaré permettent de tenir compte de ces conditions avec une précision parfaite. On arriverait ainsi à rendre les calculs vraiment praticables, même en embrassant une très longue période de temps.

Étude qualitative du mouvement.

65. *Classification des trajectoires réelles.* — J'ai étudié aussi le mouvement d'un système matériel au point de vue que M. Poincaré appelle *qualitatif* (périodicité du mouvement, stabilité ou instabilité de l'équilibre, etc.).

J'ai développé, tout d'abord [43, 48], une classification des *trajectoires réelles* d'un système matériel S soumis à des liaisons et à des forces qui ne dépendent ni des vitesses ni du temps.

Je considère les n paramètres $(x_1, \ldots, x_n)$ qui définissent la position de S comme les coordonnées d'un point de l'espace à n dimensions; toute trajectoire réelle du système est représentée par une courbe de cet espace. Ces courbes dépendent de $(2n-1)$ constantes, à moins que toutes les forces ne soient nulles : auquel cas les trajectoires (*géodésiques* du système) ne dépendent que de $(2n-2)$ constantes [1].

L'étude des trajectoires réelles d'un système conduit naturellement à associer aux mouvements vrais du système les mouvements *conjugués*, qu'on obtient en changeant le sens de toutes les forces : analytiquement, les mouvements conjugués se déduisent des mouvements vrais en remplaçant t par it.

Quand on ne regarde pas comme distincts deux mouvements qui se déduisent l'un de l'autre en augmentant t d'une constante, toute trajectoire réelle de S ne comporte que deux mouvements (vrais ou conjugués) qui se déduisent l'un de l'autre quand on change t en $-t$. Il en est autrement, toutefois, si la trajectoire coïncide avec une *géodésique* du système : elle comporte alors une infinité de mouvements (tant vrais que conjugués) qui dépendent d'une constante arbitraire. Ces trajectoires, que j'appelle *remarquables*, dépendent au plus de $(n-1)$ constantes.

Une trajectoire réelle est parcourue en général tout entière, soit dans un mouvement vrai, soit dans un mouvement conjugué. Il existe, toutefois, un faisceau (à n constantes) de trajectoires que j'appelle *mixtes*, qui sont en partie vraies et en partie conjuguées; les points de séparation sont des *points d'arrêt* du mouvement : quand le système atteint un de ces points sur la trajectoire considérée, il rétrograde. Deux points d'arrêt consécutifs sur la même trajectoire (pourvu qu'aucun ne soit position d'équilibre) donnent naissance à un mouvement périodique *oscillatoire*.

Quand les trajectoires *remarquables* dépendent de leur nombre maximum $(n-1)$ de constantes, elles se confondent avec la famille des trajectoires *mixtes*, pour lesquelles le nombre des constantes s'abaisse ainsi d'une unité. Les conditions pour qu'on se trouve dans ce cas intéressant sont très simples : si, par exemple, S se réduit à un point libre, il faut que les lignes d'action des forces (qui, en général, forment un *complexe*) forment seulement une *congruence*.

Par un point donné quelconque $(x_1, \ldots, x_n)$, ou M, correspondant

---

[1] Quand les forces dépendent des vitesses, il y a d'autres cas, que j'ai nettement définis, où le nombre des constantes s'abaisse à $(2n-2)$.

à *une position régulière qui n'est pas une position d'équilibre*, passent une infinité (à un paramètre) de trajectoires tangentes à une direction arbitrairement choisie; quand le paramètre dont elles dépendent (valeur absolue de la force vive au point considéré de la trajectoire) croît indéfiniment, la trajectoire tend vers une géodésique. Dans un certain domaine entourant le point considéré, toutes ces trajectoires sont régulières et parcourues d'un mouvement régulier (vrai ou conjugué).

Il en est tout autrement quand la position régulière M est *position d'équilibre*. Par M il peut passer (en outre du faisceau régulier des trajectoires) d'autres trajectoires que j'appelle *singulières*, qui peuvent admettre le point comme point asymptote, avoir une longueur infinie, etc.; ces trajectoires, qui sont isolées ou dépendent de constantes, ne sont parcourues, en un temps fini, ni dans le mouvement vrai, ni dans le mouvement conjugué. Deux circonstances se présentent : ou bien le système tend vers M sur la trajectoire quand t (ou quand it) croît indéfiniment (*trajectoire asymptotique*); ou bien la trajectoire renferme une infinité de points d'arrêt qui tendent vers M, et *se décompose en une infinité d'arcs de plus en plus petits qui correspondent à des mouvements périodiques oscillatoires alternativement vrais et conjugués.*

J'ai donné divers exemples de ces singularités, dont la dernière surtout est remarquable.

66. *Étude des positions d'équilibre.* — D'après cela, l'étude du mouvement d'un système dans le voisinage d'une position régulière M ne présente de difficulté que si M est position d'équilibre. Il restait à discuter les apparences du mouvement dans le voisinage d'une telle position ([1]).

Stabilité de l'équilibre. — En premier lieu, j'ai discuté [68] la *stabilité de l'équilibre*. On sait que cette difficile question a fait l'objet des travaux de MM. Poincaré, Liapounoff, Kneser et Hadamard. Pour indiquer brièvement les compléments que j'ai apportés aux résultats de ces auteurs, je me limiterai au cas de $n = 2$, c'est-à-dire au mouvement d'un point sur une surface.

([1]) J'ai développé tous les résultats qui suivent (relatifs à la stabilité, aux petits mouvements périodiques) dans un Cours professé au Collège de France (mars, avril, mai 1897).

Soient $x_1 = x_2 = 0$ une position d'équilibre isolée, et U la fonction de forces qui, dans le voisinage de l'origine, est de la forme

$$U = \lambda x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + \nu x_2^2 + \ldots .$$

Supposons d'abord que *les termes du second degré ne soient pas tous nuls*. Si U est *maxima* pour $x_1 = x_2 = 0$, l'équilibre est stable. Il s'agit de savoir *si cette condition suffisante est nécessaire*.

Les résultats des auteurs que je viens de citer ne permettent pas de trancher la question; en effet, un cas très délicat restait à traiter : celui où les termes du second degré de U forment un *carré parfait négatif*. J'ai réussi à élucider ce cas : si U n'est pas maxima, l'équilibre est instable et il existe au moins une trajectoire *asymptotique* à l'origine, mais il peut n'en exister qu'une seule. Du moment que les termes du second degré dans U ne sont pas tous nuls, pour que l'équilibre soit stable, il *faut* donc et il suffit que U soit maxima.

J'ai établi le même théorème dans un cas tout différent, celui *où* U *commence par des termes d'ordre $m (m \geqq 2)$, mais où toutes les tangentes (réelles) de la courbe* $U = 0$ *à l'origine sont distinctes*. Si U est *minima*, j'ai fait voir que par chaque point voisin de l'origine passe une trajectoire asymptotique à l'origine. Si U n'est *ni maxima ni minima*, les demi-branches réelles (issues de l'origine) de la courbe $U = 0$ décomposent l'aire voisine de l'origine en $2k$ aires A_1, A_2, A_3, ..., où U est alternativement positif et négatif; chaque aire A_1, A_3, A_5, ... renferme au moins une trajectoire asymptotique à l'origine, mais peut n'en renfermer qu'une.

67. *Petits mouvements périodiques des systèmes*. — Parmi les trajectoires qui restent voisines d'une position d'équilibre, une classe particulièrement intéressante est celle des *trajectoires fermées* ou, si l'on veut, des trajectoires qui correspondent à un mouvement périodique.

Une belle méthode de M. Poincaré permet de mettre en évidence ces solutions périodiques. Elle prête toutefois à une objection assez délicate; son point de départ est, en effet, le suivant : deux courbes de la forme

$$\mu x + P(x, y, \mu) = 0, \qquad \mu y + Q(x, y, \mu) = 0$$

(où P et Q commencent par des termes du second degré en x, y, et où

μ désigne un paramètre) ont évidemment pour $\mu \neq 0$ un point variable et voisin de l'origine qui, pour $\mu = 0$, vient se confondre avec l'origine. Or ce postulat qui semble intuitif n'est pas nécessairement exact, comme le montre l'exemple

$$\mu x + x^2 - y^2 = 0, \qquad \mu y + x^2 - y^2 = 0.$$

J'ai levé l'objection et donné à la discussion une forme extrêmement simple et d'une application facile [66]; j'ai mis ainsi en évidence l'existence d'une infinité de petits mouvements périodiques dans le voisinage d'une position ordinaire d'équilibre, *où la fonction de forces n'est pas minima*. La méthode n'est en défaut que dans des cas exceptionnels. La période ω de ces petits mouvements tend vers une certaine limite Ω quand l'amplitude du mouvement tend vers zéro, soit $\omega = \Omega + \varepsilon$, *et le signe de ε est le même* pour tous les petits mouvements; c'est le signe d'une certaine constante numérique facile à calculer sur les équations différentielles; $\omega \equiv \Omega$ dans des cas particuliers.

J'ai appliqué cette discussion au mouvement d'un *solide pesant fixé par un quelconque de ses points*. Ce système comporte une infinité de mouvements périodiques réels (¹) dépendant de *deux* paramètres arbitraires. Toutefois ces mouvements ne sont pas des mouvements périodiques proprement dits : au bout du temps ω, les conditions du solide sont redevenues les mêmes, à cela près qu'il a tourné d'un angle α autour de la verticale. Pour que ce mouvement soit strictement périodique, il faut que α soit commensurable avec π. La discussion n'est en défaut que si l'on a

$$\eta = 0, \qquad \frac{\zeta}{\xi} = \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}},$$

ξ, η, ζ désignant les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes principaux d'inertie, et A, B, C les moments principaux d'inertie $(A \geqq B \geqq C)$.

68. *Petits mouvements périodiques à très longue période.* — La mé-

(¹) M. Kœnigs a signalé l'existence de tels mouvements pour les solides pesants fixés par un point *voisin de leur centre de gravité*. L'éminent géomètre s'est borné à indiquer que sa démonstration repose sur la convergence de séries dont les termes sont des fonctions sn; elle est donc tout à fait distincte de la mienne.

thode de M. Poincaré pour déterminer les petits mouvements périodiques suppose essentiellement que la période ω du mouvement reste finie quand son amplitude tend vers zéro; elle s'appuie, en effet, sur le développement des intégrales suivant les puissances d'un paramètre infiniment petit μ; pour $t \leqq \omega < A$ (A désignant une quantité donnée), les développements convergent dès que μ est suffisamment petit; mais quand ω croît indéfiniment, on ne sait plus rien (si petit qu'on prenne μ) sur la convergence des développements.

Or quand la fonction de forces U commence (dans le voisinage de la position d'équilibre $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) par des termes de degré supérieur au second, il n'existe plus de petits mouvements périodiques de période finie, tandis que des exemples à un paramètre mettent en évidence de petites oscillations périodiques dont la période croît indéfiniment quand l'amplitude tend vers zéro.

De telles solutions périodiques existent-elles, en général? Si oui, comment les mettre en évidence? C'étaient là des questions qui semblaient exiger des méthodes tout à fait nouvelles.

Je suis parvenu cependant [67] à les résoudre à l'aide d'un artifice très simple; j'ai montré notamment que, si la fonction de forces $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est *maxima* pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ et commence par des termes de degré supérieur au second, *il existe dans le voisinage de la position d'équilibre une infinité de petits mouvements périodiques réels et distincts (dépendant d'un paramètre); mais la période de ces mouvements croît indéfiniment quand leur amplitude tend vers zéro.*

Il est bien évident, d'ailleurs, que tous les résultats obtenus à propos des équations de la Dynamique ont leurs analogues pour des systèmes différentiels quelconques. Mais les problèmes dont je viens de parler prennent un sens plus intuitif et une forme plus brève quand on les énonce en Mécanique.

Transformation des équations de la Dynamique.

69. *Énoncé du problème et théorèmes principaux.* — Tous les géomètres connaissent les beaux travaux de M. Dini sur la *représentation géodésique* des surfaces. Ce problème comporte en Mécanique une généralisation naturelle [25, 27, 30, 31, 32, 41]. Appelons *famille*

de trajectoires l'ensemble de courbes (à trois paramètres) que peut décrire un point M mobile sans frottement sur une surface et soumis à une force donnée qui ne dépend que de la position du point. *Étant données deux surfaces et une famille de trajectoires sur chacune d'elles, peut-on établir entre ces surfaces une correspondance ponctuelle qui transforme l'une dans l'autre ces deux familles?* Quand les forces qui définissent la première famille sont nulles, celle-ci se confond avec les géodésiques de la surface et ne dépend plus que de deux paramètres : il faut donc qu'il en soit de même pour la seconde famille, et l'on retombe sur le problème de M. Dini.

Il est loisible de rapporter les deux surfaces à des coordonnées curvilignes u, v, telles que les points correspondants des deux surfaces soient définis par les mêmes coordonnées. Si je représente alors par $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q\right)$, $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q_1\right)$ les deux systèmes d'équations de Lagrange qui définissent respectivement le mouvement du point M sur les deux surfaces S et S_1, ces deux systèmes doivent définir les mêmes trajectoires (mais point nécessairement les mêmes mouvements). Je conviens de dire, dans ce cas, qu'ils sont *correspondants*.

On connait deux modes particuliers de telles correspondances qui existent pour une surface S quelconque. Le premier réalise l'application de S sur une surface S_1 ou sur une surface homothétique de S_1; quand on passe du premier système de Lagrange au second, les forces et le temps sont seulement multipliés par un facteur constant; autrement dit, les deux *correspondants* sont alors de la forme

$$\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q\right), \qquad \left(a\,\frac{ds^2}{dt_1^2}, bQ\right),$$

a et b désignant des constantes.

Le second mode de correspondance, indiqué par M. Darboux comme généralisant une remarque de M. Goursat, exige que les forces Q dérivent d'un potentiel U. Si l'on prend pour S_1 une surface dont le ds_1^2 est $(aU + b)ds^2$, et pour fonction de forces $\frac{cU + d}{aU + b}$, les trajectoires se correspondent.

J'appellerai *correspondants ordinaires* deux systèmes correspondants d'équations de Lagrange qui rentrent dans une des deux catégories précédentes.

La surface S étant quelconque, le problème posé n'admet pas, en général, d'autres solutions que les correspondances ordinaires. Autrement dit, un système de Lagrange $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q\right)$, pris au hasard, ne possède pas de correspondants distincts des correspondants ordinaires. J'ai montré d'ailleurs que, s'il en admet un, il en admet une *infinité* qui sont distincts (j'entends qui ne sont pas correspondants ordinaires l'un de l'autre).

J'ai discuté dans tous ses détails [41, 58] cette question de l'existence de correspondants *non ordinaires*. Trois cas généraux sont à distinguer :

Premier cas. — La correspondance entre S et S_1 conserve les géodésiques. Quand il en est ainsi, à tout système de forces Q l'on peut associer des forces Q_1 telles que les deux familles de trajectoires se correspondent sur S et S_1. Les géodésiques de S admettent alors nécessairement une *intégrale première du second degré*. Les deux systèmes d'équations de Lagrange se transforment l'un dans l'autre par un changement de variables $dt_1 = \lambda(u, v)dt$.

Deuxième cas. — Les Q dérivent d'un potentiel, et moyennant une transformation de M. Darboux effectuée sur le système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q\right)$ on rentre dans le premier cas.

Troisième cas. — On peut passer d'un des systèmes de Lagrange à l'autre par une transformation

$$\frac{dt_1^2}{dt^2} = \lambda(u, v)\left[\frac{d\sigma^2}{dt^2} - R(u, v)\right],$$

où l'égalité $\frac{d\sigma^2}{dt^2} - R = \text{const.}$ définit une *intégrale quadratique* du premier mouvement (distincte de l'intégrale des forces vives).

Dans chacun de ces trois cas, un au moins des deux systèmes de Lagrange (où l'on annule les forces) possède une intégrale quadratique. Comme on connaît tous les ds^2 qui jouissent de cette propriété, *il est extrêmement facile de former explicitement tous les correspondants de la première et de la seconde catégorie;* au contraire, les conditions différentielles qui définissent les systèmes correspondants de la troisième catégorie semblaient fort compliquées et d'une intégration malaisée. Je suis parvenu cependant à déterminer explicitement sans calculs tous les systèmes de cette catégorie. La règle est bien simple : *On considère deux correspondants de M. Darboux, tels que leurs géodésiques admettent respectivement une intégrale du deuxième degré, et l'on remplace chacun de ces systèmes par un quelconque de ses correspondants de la première catégorie; les correspondants ainsi obtenus épuisent les correspondants de la troisième catégorie.*

70. *Questions connexes.* — J'étais dès lors en état de traiter les diverses questions qui se rattachent à l'existence des correspondants. Une des plus intéressantes que j'aie résolues [33, 41, 47] s'énonce ainsi :

La surface S *et les forces* Q *étant données, peut-on les remplacer par des forces* Q_1 *telles que la nouvelle famille de trajectoires soit une transformée ponctuelle de la première ?*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q\right)$ admette un correspondant $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q_1\right)$ tel que ds^2 et ds_1^2 soient deux ds^2 applicables. En particulier, j'ai montré que la transformation n'est *conforme* que si les deux systèmes de Lagrange sont des *correspondants ordinaires.*

Deux cas généraux sont à considérer dans ce problème, suivant que la transformation de passage entre les deux familles de trajectoires conserve ou non les géodésiques.

Quand les géodésiques admettent une transformation ponctuelle en elles-mêmes, soit (τ), à tout système de forces Q on peut faire correspondre des forces Q_1 telles que les nouvelles trajectoires se déduisent des premières par la transformation (τ). C'est ainsi que les géodésiques du plan (les droites) se conservant dans la transformation homographique, à toute loi de forces dans le mouvement plan on peut en substituer une autre (dépendant de huit constantes) telle que les nouvelles trajectoires soient des transformées homographiques des premières.

On voit comment mes recherches se rattachent à l'*homographie en Mécanique* que M. Appell a si heureusement introduite dans la théorie des forces centrales [1].

---

[1] M. Appell et, après lui, M. Dautheville se sont aussi occupés des *correspondants* de la première catégorie.

Mais il existe des modes de transformation des trajectoires qui ne conservent pas les géodésiques et n'appartiennent qu'à des forces Q exceptionnelles. C'est ainsi qu'*à certaines lois de forces du mouvement plan on peut associer une autre loi telle que les nouvelles trajectoires se déduisent des premières par une transformation ponctuelle qui n'est plus homographique et qui peut même être transcendante*. Voici un exemple de cette circonstance bien curieuse : rapportons le plan aux coordonnées elliptiques α, β définies par les coniques

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-1}=1 \qquad (\lambda=\alpha,\quad \lambda=\beta),$$

et considérons les deux lois de forces

$$Q_1=\frac{\alpha}{(1-k^2\alpha^2)^2(\alpha^2-\beta^2)^2}, \qquad Q_2=\frac{\beta}{(1-k^2\beta^2)^2(\alpha^2-\beta^2)^2}$$

et

$$U=\frac{1}{1-k^2 sn^2\,\alpha\beta}-\frac{1}{1-k^2 sn^2\sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}};$$

les secondes trajectoires se déduisent des premières en changeant α en $sn\alpha\beta$ et β en $sn\sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}$, transformation ponctuelle transcendante.

La recherche des *transformations ponctuelles des trajectoires en elles-mêmes* rentre évidemment, comme cas particulier, dans le problème précédent. Ces transformations peuvent ou non conserver les géodésiques; j'en ai donné une classification précise; les travaux de M. Kœnigs sur les ds^2 à intégrales quadratiques, combinés avec les résultats precédents, permettent d'en épuiser l'étude.

71. *Systèmes à n paramètres.* — Tous les problèmes et toutes les propositions que je viens d'indiquer ont leurs analogues quel que soit le nombre des dimensions des ds^2, c'est-à-dire dans l'étude des systèmes à $2n$ degrés de liberté [30 à 32, 41, 58]. La différence principale qui sépare le cas de $n=2$ du cas général, c'est que *l'existence d'intégrales quadratiques (du mouvement avec ou sans forces) est toujours nécessaire, mais ne suffit plus pour qu'un système de Lagrange admette des correspondants non ordinaires*. J'ai indiqué, sous une forme très simple, les conditions supplémentaires qu'il faut ajouter pour chacune des trois catégories de correspondants.

J'ai donné des exemples étendus de correspondants des diverses espèces, ainsi que de groupes de transformations des trajectoires, etc., mais sans les épuiser tous. *J'ai toutefois déterminé explicitement* [33, 47] *tous les systèmes* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q\right)$ *à n paramètres, dont les trajectoires admettent une transformation continue conforme.*

Dans l'étude de la *représentation géodésique des* ds^2 *quelconques,* je me suis trouvé en contact avec M. Liouville sur plusieurs points où nous conduisaient des méthodes toutes différentes. Depuis lors, M. Levi-Civita a achevé, par une méthode très élégante, d'élucider complètement cette question.

J'ajoute que cette étude des systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q\right)$ *correspondants* m'a amené à donner une forme extrêmement simple aux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de courbes coïncide avec les trajectoires d'un système. La méthode que j'emploie s'applique d'ailleurs aussi bien aux équations du *calcul des variations;* elle met en évidence leurs invariants absolus et leurs propriétés caractéristiques.

Mécanique analytique du frottement.

72. La Mécanique analytique proprement dite ne s'occupe que des systèmes dénués de frottement. L'étude d'un grand nombre de systèmes particuliers avait montré, vers la fin du siècle dernier, qu'on peut admettre dans bien des cas, sans erreur sensible, que les réactions du système ont un travail nul dans tout déplacement infinitésimal *virtuel* (compatible avec les liaisons) : on adopta cette propriété comme une définition de l'absence de frottement, et l'on constitua la Mécanique des systèmes matériels, dont les réactions satisfont à cette restriction.

En réalité, cette restriction n'est jamais qu'imparfaitement remplie. Quand elle s'écarte trop de la réalité, on la corrige en complétant les réactions par des forces retardatrices qu'on appelle *forces de frottement*.

Les lois auxquelles obéissent ces forces de frottement sont des lois empiriques encore mal étudiées. Mais, telles qu'elles sont, ne présentent-elles pas dès maintenant assez de caractères généraux communs pour permettre de constituer une Mécanique analytique des systèmes doués de frottement, analogue à la Mécanique classique? L'entreprise ne m'a pas semblé impossible et je l'ai tentée [43, 49, 50, 52]. L'intérêt d'une telle entreprise n'est pas seulement de donner plus d'unité et de beauté à une doctrine didactique; il est plus profond. Dans la Mécanique des systèmes continus (hydrodynamique, élasticité, etc.), en Thermodynamique, en Thermochimie, on admet comme postulat fondamental un principe analogue au principe des vitesses virtuelles (tel qu'on l'énonce pour les systèmes dénués de frottement). Ce principe n'est jamais exactement vérifié; pour le corriger, on doit, là aussi, introduire certaines forces retardatrices dont la nature est encore bien obscure. Une Mécanique plus rationnelle et plus parfaite du frottement serait, dans ces difficiles recherches, un guide précieux.

73. *Discussion des lois empiriques du frottement.* — En étudiant les lois empiriques du frottement, mon attention a été frappée par un fait qui, certes, n'est pas difficile à apercevoir, mais dont on ne semble pas avoir remarqué les conséquences. Imaginons, pour fixer les idées, un corps rond, pesant, qui glisse avec frottement sur un plan horizontal; le fait que je veux signaler, c'est que *le frottement ne modifie pas seulement la composante tangentielle de la réaction, mais aussi la composante normale;* si le corps est placé dans des conditions initiales déterminées, la réaction *normale* est différente, suivant qu'il est, par exemple, huilé ou non.

Ne semble-t-il pas, dès lors, plus rationnel d'appeler *force de frottement* la véritable force due au frottement, c'est-à-dire la différence géométrique entre la réaction réelle et la *force de liaison*, réaction qui s'exercerait dans les mêmes conditions entre les deux corps supposés parfaitement polis? De même, à la loi empirique du frottement qui fait connaître la réaction totale en fonction de sa composante normale, ne convient-il pas de substituer la *loi rationnelle de frottement* qui fait connaître la réaction totale en fonction de la force de liaison?

Cette conception trouve une confirmation singulièrement forte dans les difficultés que soulève l'application de la loi empirique du frottement. Sans doute, la loi rationnelle et la loi empirique du frottement se déduisent l'une de l'autre d'une façon tout élémentaire; mais, tandis que la seconde se déduit de la première sans la moindre difficulté, les calculs algébriques qui déterminent la loi rationnelle en partant de la loi empirique peuvent aboutir à une impossibilité ou à une ambiguïté. Quand cette singularité se présente, c'est que la loi empirique est logiquement inadmissible ou laisse le choix entre deux mouvements possibles.

On serait, il est vrai, tenté de croire que seuls des systèmes très exceptionnels peuvent prêter à de telles difficultés. C'est tout le contraire qui est vrai, au moins dès que le coefficient empirique de frottement f est suffisamment grand.

Considérons, par exemple, deux disques situés dans un même plan, dont l'un est fixe et dont l'autre glisse avec frottement sur le premier. (Dans la réalité, les deux disques seront deux cylindres glissant l'un sur l'autre.) Si l'on appelle GA, GB, les distances du centre de gravité G du disque mobile à la normale et à la tangente commune aux deux disques, et K le rayon de gyration du disque autour de G, la composante normale de la réaction est donnée par l'égalité

$$N = \frac{P}{K^2 + GA^2 - \varepsilon f\, GA.GB} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

où P est indépendant de f. *Si donc le disque mobile n'est pas un segment de droite ou un cercle dont le centre coïncide avec* G, N *dépend de* f (¹). *La loi empirique du frottement de glissement conduit à une impossibilité dès que* f *dépasse* $\frac{K^2 + GA^2}{GA.GB}$.

Une conclusion analogue s'applique à deux solides quelconques qui glissent l'un sur l'autre.

Comme exemple précis, prenons une tige métallique AB dont une extrémité glisse avec frottement sur une horizontale Ox du plan vertical xOy. Soient l la longueur totale de la barre, m sa masse, mk^2 son moment d'inertie par rapport au centre de gravité G, α l'angle

(¹) Si aux conditions initiales données on compare les mêmes conditions initiales où toutes les vitesses sont changées de signe, la nouvelle valeur de N s'obtient en changeant dans la première le signe de ε : le frottement augmente N dans un des cas et le diminue dans l'autre.

$\left(\text{compris entre o et } \frac{\pi}{2}\right)$ que fait la tige avec la verticale dans la position initiale où on l'abandonne; je suppose enfin la tige animée (à l'instant initial) d'une vitesse de translation horizontale, dirigée en sens inverse de la projection de AB sur Ox. Aucun mouvement possible ne satisfait à la loi empirique de frottement dès que f est plus grand que $\frac{k^2 + l^2 \sin^2 \alpha}{l^2 \sin \alpha \cos \alpha}$. En prenant α petit, et en choisissant une tige dont l'extrémité B soit très lourde par rapport au reste de la tige, on peut rendre cette limite de f inférieure, par exemple, à $\frac{1}{20}$.

Autre exemple : Un cylindre de révolution glisse avec frottement sur un plan incliné. Soient l sa longueur, r son rayon de base, k son rayon de gyration autour de son axe, i l'inclinaison du plan. Le cylindre étant animé d'un mouvement initial de translation parallèle à une ligne de plus grande pente du plan, aucun mouvement n'est compatible avec la loi de frottement dès que f dépasse la quantité $\frac{r}{l} + \frac{k^2}{rl}$. En construisant le cylindre avec deux cylindres concentriques, le cylindre intérieur beaucoup plus lourd que le cylindre extérieur, on peut rendre cette limite inférieure aux valeurs ordinaires de f.

74. Voilà donc des expériences réalisables où les lois classiques du frottement ne sauraient se vérifier.

On a admis jusqu'ici que la composante tangentielle R_t de la réaction est une fonction de la composante normale N, soit $R_t = \varphi(N)$, fonction qui ne dépend que de la nature des éléments matériels en contact et de leurs vitesses relatives. Si cette hypothèse doit subsister, pour que la loi empirique de frottement $R_t = \varphi(N)$ échappe aux contradictions que je viens de signaler, il faut qu'elle satisfasse à une restriction : $\frac{R_t}{N}$ doit tendre vers zéro pour N très grand.

Mais convient-il de conserver cette hypothèse ? On en peut douter, si l'on remarque que les systèmes rudimentaires qu'on a soumis au contrôle de l'expérience rentrent précisément dans la classe exceptionnelle pour laquelle la réaction normale ne dépend pas du frottement; *pour ces systèmes, la loi empirique et la loi rationnelle de frottement se confondent.* Supposons pour un instant que la loi exacte du frottement de glissement soit la proportionnalité de la réaction tangentielle à la force de liaison (et non à la composante normale) : cette loi serait parfaitement d'accord avec les expériences connues. *Il est donc indispensable d'effectuer de nouvelles expériences sur des systèmes de l'espèce générale, j'entends pour lesquels la réaction normale dépend sensiblement du frottement.* La loi ordinaire du frottement devra sûrement être modifiée. Il conviendra de voir si une relation très simple n'existe pas entre la réaction et la force de liaison. Lors même qu'une telle relation ne serait pas susceptible d'un énoncé aussi général que la loi vulgaire de frottement, il serait sans doute possible de classer les liaisons entre solides en un nombre fini de types qui comporteraient chacun une loi rationnelle de frottement très précise.

Ce sont là des questions que l'expérience peut seule trancher. Mais, quelle que soit la loi empirique de frottement à laquelle on aboutisse, une chose est certaine : c'est que si cette loi est exacte pour un système, j'entends sensiblement conforme à la réalité, elle permet, par un calcul tout élémentaire, de former la loi rationnelle de frottement, sans difficulté et sans ambiguïté. Nous pouvons donc toujours admettre que la loi rationnelle de frottement est connue.

Dès lors, on peut constituer, pour les solides doués de frottement, une Mécanique entièrement analogue à la Mécanique classique des solides. On sait que, si un ensemble de solides est assujetti à un groupe de liaisons simples dont chacune est sans frottement, le système ainsi constitué est sans frottement, et l'on peut calculer son mouvement, connaissant les forces données. Cette proposition subsiste si chaque liaison simple donne lieu à un frottement dont on connaît la loi rationnelle : on peut encore calculer le mouvement du système assujetti à toutes les liaisons et soumis à des forces données. Il y a lieu toutefois de noter ici une différence : quand il n'y a pas frottement, le théorème énoncé suppose seulement que les liaisons combinées sont *compatibles* géométriquement et mécaniquement; quand il y a frottement, il faut encore qu'elles ne soient pas *surabondantes*. Par exemple, on sait calculer le mouvement d'un solide qui repose par *trois* points sur un plan, connaissant le coefficient de frottement attaché à chacun des trois points; il n'en est plus de même si le corps repose sur quatre pieds; il faut alors recourir à la théorie de l'élasticité.

75. *Définition générale des forces de frottement.* — Ce que je viens de dire pour un système de solides s'applique à un système matériel S entièrement quelconque (continu ou discontinu) dont la position dépend d'un nombre fini de paramètres. Voici la définition générale que j'ai donnée des forces de frottement : Je considère les différents points du système dans des conditions initiales déterminées; si le système était sans frottement, c'est-à-dire (par définition) si le travail virtuel des réactions était constamment nul, on saurait calculer à la fois le mouvement du système sous l'influence des forces données, et les réactions (R′) qui s'exercent sur chaque point M (de masse m), réactions que j'appelle *forces de liaison*. En réalité, le système étant doué de frottement, les réactions diffèrent des forces de liaison; j'appelle *force de frottement* s'exerçant sur M la différence géométrique (ρ) entre la réaction vraie (R) et la force de liaison (R′).

Le système de segments (ρ) jouit, quelles que soient les lois du frottement, de propriétés géométriques remarquables. On a d'abord

$$\sum \frac{R^2}{m} = \sum \frac{R'^2}{m} + \sum \frac{\rho^2}{m}.$$

De plus, le déplacement du système (S), où chaque point M subit le déplacement $\frac{(\rho)}{m}\delta t$, est un déplacement *virtuel*. Chaque réaction (R) se trouve ainsi décomposée en deux forces (ρ) et (R′) dont l'ensemble satisfait à ces deux conditions : 1° *le travail virtuel des* (R′) *est nul;* 2° *le déplacement* $\frac{(\rho)}{m}\delta t$ *imposé à chaque point* M *constitue un déplacement virtuel de* S.

On montre que, pour un ensemble quelconque de segments, une telle décomposition est toujours possible et d'une seule manière; il est donc loisible encore de définir les forces de frottement et de liaison d'après cette décomposition.

76. Le caractère commun à toutes les lois de frottement, c'est de déterminer les forces de frottement ρ en fonction des forces de liaison R′ (et des positions et vitesses de S à l'instant considéré t). La loi sera dite *loi rationnelle* du frottement si elle donne explicitement les ρ en fonction des R′. Quand un système est assujetti à plusieurs liaisons

distinctes, sa loi rationnelle de frottement se calcule sans difficulté ni ambiguïté, à l'aide des lois analogues attachées à chaque liaison, pourvu du moins que les liaisons ne soient ni incompatibles ni surabondantes. Les équations du mouvement peuvent recevoir la forme donnée par Lagrange aux équations du mouvement sans frottement [1].

Un autre caractère commun des lois du frottement, c'est d'être en défaut quand les positions et vitesses des points de S satisfont à certaines conditions exceptionnelles. Ces conditions expriment toujours que, dans une des liaisons, deux des éléments matériels qui frottent l'un sur l'autre ont une vitesse relative nulle. On est alors dans le cas du frottement *au repos* ou *au départ*. La loi du frottement relative à la liaison considérée doit alors être remplacée par la suivante : Ou bien, pendant un certain temps, les conditions exceptionnelles restent remplies, ou bien elles cessent immédiatement de l'être et la loi ordinaire du frottement s'applique à la liaison; dans le premier cas, les forces de frottement dues à la liaison sont assujetties à certaines inégalités par rapport aux forces de liaison correspondantes. La loi ainsi modifiée fournit, pour tous les types naturels de liaison, assez d'équations pour mener à bonne fin la discussion.

J'ai appliqué ces généralités à un grand nombre d'exemples, comme celui de la sphère pesante mobile avec frottement sur un plan incliné, que j'ai intégré et complètement discuté.

Il est clair que la théorie précédente embrasse le frottement de roulement et de pivotement. Elle constitue pour les systèmes quelconques doués de frottement une véritable Mécanique analytique.

---

(1) M. Appell s'est occupé, à un tout autre point de vue, d'étendre les équations de Lagrange au mouvement des systèmes doués de frottement.

LISTE CHRONOLOGIQUE DES TRAVAUX.

1. Sur le développement en série de polynomes d'une fonction holomorphe dans une aire convexe (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CII, p. 672; 1886).

2. Sur les systèmes d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CIV, p. 839; 1887).

3. Sur les lignes singulières des fonctions analytiques [Thèse, Paris, juin 1887 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse;* janvier 1888)].

4. Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CIV, p. 1497; 1887).

5. Sur les équations différentielles linéaires (*Comptes rendus*, 2e semestre, t. CV, p. 58; 1887).

6. Sur les transformations rationnelles des courbes algébriques (*Ibid.*, p. 792).

7. Sur la représentation conforme des polygones (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CVI, p. 473; 1888).

8. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques (*Ibid.*, p. 535).

9. Sur les équations différentielles du premier ordre (*Comptes rendus*, 2e semestre, t. CVII, p. 225; 1888).

10. Sur les équations différentielles du premier ordre (*Ibid.*, p. 320).

11. Sur les équations différentielles du premier ordre (*Ibid.*, p. 724).

12. Sur la transformation des fonctions harmoniques et les systèmes triples de surfaces orthogonales (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille;* t. I, p. 1-29; août 1889).

13. Sur les intégrales rationnelles des équations différentielles du premier ordre (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CX, p. 34; 1890).

14. Sur les transformations simplement rationnelles des surfaces algébriques (*Ibid.*, p. 184).

15. Sur les transformations rationnelles des surfaces et sur une classe d'équations différentielles (*Ibid.*, p. 226).

16. Sur une transformation des équations différentielles du premier ordre (*Ibid.*, p. 840).

17. Sur les intégrales algébriques des équations différentielles du premier ordre (*Ibid.*, p. 945).

18. Sur les équations différentielles du premier ordre (1re Partie) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VIII, p. 9-58 et 103-140; janvier et mars 1891).

19. Sur le problème de la représentation conforme (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXII, p. 653; 1891).

20. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre (*Ibid.*, p. 1190).

21. Sur les équations différentielles du premier ordre (2e Partie) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VIII, p. 201-226, 267-284, et t. IX, p. 9-30; août, septembre 1891 et janvier 1892).

22. Remarque sur une Communication de M. Markoff relative aux équations linéaires (*Comptes rendus*, 2e semestre, t. CXIII, p. 739; 1891).

23. Sur les équations différentielles du premier ordre et du premier degré dont l'intégrale n'admet qu'un nombre fini de déterminations (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXIV, p. 104; 1892).

24. Sur les équations du premier ordre dont l'intégrale n'admet qu'un nombre fini de déterminations (*Ibid.*, p. 280).

25. Sur les transformations en Mécanique (*Ibid.*, p. 901).

26. Sur les équations différentielles du premier ordre (3e Partie) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. IX, p. 101-144 et 283-308; avril et juin 1892).

27. Sur les transformations en Mécanique (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXIV, p. 1104; 1892).

28. Sur les intégrales premières de la Dynamique (*Ibid.*, p. 1168).

29. Sur les groupes discontinus infinis de substitutions algébriques à une variable (*Ibid.*, p. 1345).

30. Sur les transformations en Mécanique (*Ibid.*, p. 1412).

31. Sur la transformation des équations de Lagrange (*Comptes rendus*, 2^e semestre, t. CXV, p. 495; 1892).

32. Sur la transformation des équations de la Dynamique (*Ibid.*, p. 714 et 874).

33. Sur les transformations infinitésimales des trajectoires des systèmes (*Comptes rendus*, 1^er semestre, t. CXVI, p. 21; 1893).

34. Sur les équations différentielles d'ordre supérieur dont l'intégrale n'admet qu'un nombre fini de déterminations (*Ibid.*, p. 88).

35. Sur les équations différentielles d'ordre supérieur dont l'intégrale n'admet qu'un nombre donné de déterminations (*Ibid.*, p. 173).

36. Sur les singularités essentielles des équations différentielles d'ordre supérieur (*Ibid.*, p. 362).

37. Sur les transcendantes définies par les équations différentielles du second ordre (*Ibid.*, p. 566).

38. Sur les équations du second ordre et du premier degré dont l'intégrale est uniforme (*Comptes rendus*, 2^e semestre, t. CXVII, p. 211; 1893).

39. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes et sur la correspondance biuniforme entre deux surfaces algébriques (*Ibid.*, p. 611).

40. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes (*Ibid.*, p. 686).

41. Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique (*Journal de Mathématiques*, 4^e série, t. X, p. 5-92; janvier 1894).

42. Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions (*Comptes rendus*, 1^er semestre, t. CXVIII, p. 845; 1894).

43. Leçons sur l'intégration des équations de la Dynamique et applications (Paris, Hermann, 290 pages, in-4°; 1894).

44. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires (*Comptes rendus*, 2^e semestre, t. CXIX, p. 37; 1894).

45. Note sur un Mémoire de M. Humbert (*Journal de Mathématiques*, 4^e série, t. X, p. 203-206; juillet 1894).

46. Sur une certaine identité entre déterminants (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXII, p. 116-119; juillet 1894).

47. Sur les transformations infinitésimales des trajectoires des systèmes (*Comptes rendus*, 2^e semestre, t. CXIX, p. 37; 1894).

48. Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXII, p. 136-184; octobre 1894).

49. Sur la définition générale du frottement (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXX, p. 596; 1895).

50. Sur les lois expérimentales du frottement de glissement (*Comptes rendus*, 2e semestre, t. CXXI, p. 112; 1895).

51. Sur les surfaces algébriques qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles (*Ibid.*, p. 318).

52. Leçons sur le frottement (Paris, Hermann, 110 pages in-4°; 1895).

53. Sur les fonctions uniformes définies par l'inversion de différentielles totales (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXXII, p. 660; 1896).

54. Sur l'inversion des systèmes de différentielles totales (*Ibid.*, p. 769).

55. Sur les transformations biuniformes des surfaces algébriques (*Ibid.*, p. 854).

56. Sur les équations différentielles du premier ordre (*Ibid.*, p. 1319).

57. Sur les équations différentielles du premier ordre (*Comptes rendus*, 2e semestre, t. CXXIII, p. 88; 1896).

58. Sur les transformations des équations de la Dynamique (*Ibid.*, p. 392).

59. Sur les équations différentielles du premier ordre (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, novembre 1896).

60. Sur les singularités des équations de la Dynamique (*Comptes rendus*, 2e semestre, t. CXXIII, p. 636; 1896).

61. Sur les singularités des équations de la Dynamique et sur le problème des trois corps (*Ibid.*, p. 871).

62. Sur les intégrales premières des systèmes différentiels (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXXIV, p. 136; 1897).

63. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895), sur l'invitation de S. M. le Roi de Suède et de Norvège (Paris, Hermann, 610 pages in-4°; janvier 1897).

64. Sur les intégrales de la Dynamique et sur le problème des n corps (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXXIV, p. 621; 1897).

65. Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique (*Ibid.*, p. 221; Additions, t. CXXV, p. 156).

66. Sur les petits mouvements périodiques des systèmes (*Ibid.*, p. 1222).

67. Sur les petits mouvements périodiques à très longue période (*Ibid.*, p. 1340).

68. Sur les positions d'équilibre instable (*Ibid.*, p. 1021).

69. Sur les cas du problème des trois corps (ou des n corps) où deux des corps se choquent au bout d'un temps fini (*Ibid.*, p. 1078).

70. Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXXVI, p. 200; 1898).

71. Sur le développement des fonctions holomorphes dans un domaine quelconque (*Ibid.*, p. 318).

72. Sur le développement des fonctions analytiques pour les valeurs réelles des variables (*Ibid.*, p. 385).

73. Sur le développement des fonctions réelles non analytiques (*Ibid.*, p. 459).

74. Sur les intégrales premières du problème des n corps (*Bulletin astronomique*, t. XV, p. 81-113; mars 1898).

75. Sur les surfaces qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXXVI, p. 512; 1898).

76. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes (*Ibid.*, p. 1185).

77. Sur la détermination des équations différentielles du second ordre à points critiques fixes (*Ibid.*, p. 1329).

78. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes (*Ibid.*, p. 1697).

79. Sur la détermination des équations différentielles du second ordre à points critiques fixes (*Comptes rendus*, 2e sémestre, t. CXXV, p. 541; 1898).

80. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes (*Ibid.*, p. 945).

81. Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique (*Comptes rendus*, 1er semestre, t. CXXVIII, p. 1277; 1899).

82. Sur le calcul des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipchitz (*Ibid.*, p. 1505).

83. Sur la méthode de Cauchy-Lipchitz (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXVII, p. 149; juin 1899).

84. Sur le développement d'une branche de fonction holomorphe en série de polynomes (*Comptes rendus,* 2e semestre, t. CXXIX, p. 27; 1898).

85. Sur le développement des fonctions analytiques de plusieurs variables (*Ibid.,* p. 92).

86. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes (*Ibid.,* p. 750).

87. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes (*Ibid.,* p. 949).

88. Sur la représentation des fonctions elliptiques (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXVII, p. 300-302; décembre 1899).

89. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Existenz der Lösungen (*Encyklopädie der mathematischen Wissenchaften,* t. II, p. 189-229) (article bibliographique).

90. Sur les systèmes différentiels à points critiques fixes (*Comptes rendus,* 1er semestre, t. CXXX, p. 767).

91. Sur les équations différentielles du troisième ordre à points critiques fixes (*Ibid.,* p. 879).

92. Sur les équations différentielles d'ordre quelconque à points critiques fixes (*Ibid.,* p. 1112).

93. Sur une relation entre la théorie des groupes continus et les équations différentielles à points critiques fixes (*Ibid.,* p. 1171).

94. Sur les intégrales uniformes du problème des *n* corps (*Ibid.,* p. 1699).

95. Sur la détermination unique de l'intégrale d'une équation différentielle par les conditions initiales (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXVIII, p. 191-196; juin 1900).

96. Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme (*Ibid.,* p. 201-261).

97. Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles (*Comptes rendus,* 2e semestre, t. CXXXI, p. 489; 1900).

98. Sur les systèmes différentiels dont l'intégrale générale est uniforme (*Ibid.,* p. 497).

99. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme (*Acta mathematica,* t. XXV, p. 1-80; septembre 1900).

TITRES DIVERS.

Docteur ès Sciences, 10 juin 1887.

Chargé du cours de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Lille (juillet 1887-juillet 1892).

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris (juillet 1892-avril 1895).

Professeur adjoint et chargé de cours à la Faculté des Sciences de Paris (avril 1895-juillet 1897).

Chargé d'une mission en Suède (septembre, octobre, novembre 1895) sur la demande de S. M. le Roi de Suède et de Norvège, pour professer à l'Université de Stockholm un cours sur ses travaux d'Analyse.

Professeur suppléant au Collège de France (novembre 1896-novembre 1897).

Maître de Conférences à l'École Normale supérieure (depuis juillet 1897).

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique (depuis janvier 1896) et Examinateur de passage à la même École (depuis juin 1898).

Lauréat de l'Institut :

Grand Prix des Sciences mathématiques (décembre 1890).
Prix Bordin (décembre 1894).
Prix Poncelet (décembre 1896).

Présenté en seconde ligne par la Section de Géométrie (octobre 1892).

TABLE DES MATIÈRES.

29239 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.